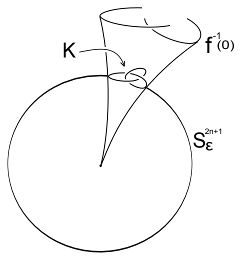
# ミルナーファイブレーションと特異点解消

# The Milnor fibrations and resolutions of singularities

数学専攻　　岡庭 秀明

OKANIWA,Hideaki

## 1　ミルナーファイブレーション




原点に零点をもつ定数でない複素 $n+1$ 変数多項式 $f$ に対して, $f$ の零点集合 $f^{-1}(0)$ を $V$ とし, $V$ と $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の原点を中心とする半径 $\varepsilon$ の $2n+1$ 次元球面 $S_\varepsilon^{2n+1}$ との共通部分 $V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ を $K$ とする．このとき写像 $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} \backslash K \longrightarrow S^1$ を

$$\phi(\boldsymbol{z}) = \frac{f(\boldsymbol{z})}{|f(\boldsymbol{z})|}$$

によって定める．$\phi$ は $f(\boldsymbol{z})$ の偏角をとる写像である．

**定理 1.1** (Milnor)**.** このとき $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して空間 $S_\varepsilon^{2n+1} \backslash K$ は $S^1$ 上の可微分ファイバー束であり, 射影は $\phi(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z})/|f(\boldsymbol{z})|$ で与えられる．

これがミルナーのファイブレーション定理である．$\phi$ を $f$ **に付随したファイブレーション**, 各ファイバー $F_\theta = \phi^{-1}(\mathrm{e}^{i\theta})$ を**ミルナーファイバー** (Milnor fibre), $K$ を**特異点のリンク**という．またこれを, $K$ を binding とする球面 $S_\varepsilon^{2n+1}$ の**オープンブック分解** (open book decomposition) という．

## 2　ファイバーとリンクのトポロジー

**定理 2.1.** 各ファイバー $F_\theta$ は平行化可能で, $n$ 次元の有限 CW 複体と同じホモトピー型をもつ．ここで平行化可能とは接束が自明なことをいう．また, 空間 $K = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ は $n-2$ 連結である．

**定理 2.2.** 複素数 $c \neq 0$ が十分ゼロに近ければ, 複素超曲面 $f^{-1}(c)$ と開 $\varepsilon$ 円板 $B_\varepsilon^{2n+2}$ との交わり $f^{-1}(c) \cap B_\varepsilon^{2n+2}$ は, ミルナーファイバー $F_\theta$ に微分同相な可微分な複素多様体である．但し, $\arg(c) = \theta$ である．

## 3　ファイバーとリンクのトポロジー その2

原点は超曲面 $V$ の孤立特異点であるか, あるいは非特異点であると仮定する．

**定理 3.1.** $S_\varepsilon^{2n+1}$ における各ファイバー $F_\theta$ の閉包は, 境界をもつ $2n$ 次元の可微分な多様体で, この多様体の内部が $F_\theta$ であり, 境界がちょうど $K$ に一致する．

**定理-定義 3.2.** ファイバー $F_\theta$ は, $n$ 次元球面 $S^n$ のいくつかのブーケ $S^n \vee S^n \vee \cdots \vee S^n$ と同じホモトピー型をもつ．このブーケの個数 $\mu$ を**ミルナーナンバー**という．$\mu$ は, 写像 $df = (\partial f/\partial z_0, \partial f/\partial z_1, \cdots, \partial f/\partial z_n) : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ の写像度に一致する．

**例 3.3.** $n+1$ 変数の Brieskorn 多項式 $f = z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n}$ に対して, $\mu = (a_0-1)(a_1-1)\cdots(a_n-1)$ が成り立つ．

# 4　いくつかの計算例

## 4.1　複素 2 変数の場合 (4.3 へ続く)

**例 4.1.** $f(z_0, z_1) = z_0^p + z_1^q$

リンク $K$ は, ある正数 $\rho_0, \rho_1$ について $|z_0| = \rho_0, |z_1| = \rho_1$ を満たす $\mathbb{C}^2$ 内の二次元トーラス上にある．また $z_0, z_1$ の偏角 $\theta_0, \theta_1$ について, $\theta_1 = p\theta_0/q + (2k-1)\pi/q$ $(k \in \mathbb{Z})$ となることから, $p$ と $q$ が互いに素であるとき, $K$ は $(p,q)$ 型トーラス結び目になる．$p$ と $q$ が互いに素でないとき, $\gcd(p,q) = d$ とおき, $p = dp', q = dq'$ と書くと, $K$ は $d$ 個の $(p', q')$ 型トーラス結び目がどの二つも絡み数が $p'q'$ である絡み目になる．2 変数多項式を扱う場合, ミルナーファイバーはリンク $K$ に対する最小種数の Seifert 曲面に一致する．

## 4.2　複素 3 変数の場合

複素 3 変数の Brieskorn 多項式 $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^p + z_1^q + z_2^r$ $(2 \leq p \leq q \leq r)$ に対して, リンク $K$ を求める．超曲面 $V = f^{-1}(0)$ は原点のみを特異点にもつが, $1/p + 1/q + 1/r$ と 1 の大小によって特異点の性質が異なる．$1/p + 1/q + 1/r$ が, 1 より大きいとき単純特異点 (simple singularities), 1 に等しいとき単純楕円型特異点 (simple elliptic singularities), 1 より小さいとき双曲型特異点 (hyperbolic singularities) と分類されている．

単純特異点のとき, Brieskorn の定理により, ミルナーファイバー $F_\theta$ と $V$ の極小特異点解消とが微分同相になることが知られている．この場合, 特異点のリンク $K$ は blowing up locus の管状近傍の境界に同相になる．

ここでは, 単純特異点に分類される最も簡単な例 $(p,q,r) = (2,2,r)$ の場合について, Euler 類を用いて計算した．

**例 4.2.** $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^r$

次の写像を考える．

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p_3} & S^3 \\ & & \big\downarrow h \\ & & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

ここで, $h$ は Hopf 写像であり, 写像 $p_3 : K \longrightarrow S^3$ は $p_3(z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1)$ によって定めている．このとき, $p_3$ は $r$ 重分岐被覆となる．分岐集合は, $\mathbb{CP}^1$ 内の 2 点 $[1 : \pm i]$ の $h$ による逆像として表される Hopf link である．このとき, その Hopf link のそれぞれの成分である $S^1$ を心棒にもつ solid torus を考えると, それは $S^3$ の標準的な Heegaard 分解 $S^3 = (S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1)$ を与える．すると, それに対応する $K$ の Heegaard 分解 $K = (S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1)$ が得られる．

$K$ の基本群 $\pi_1(K)$ について

$$\pi_1(K) \;\cong\; \left(\mathbb{Z}\binom{r}{0} \oplus \mathbb{Z}\binom{-1}{1}\right)\Big/\left(\mathbb{Z}\binom{r}{0} \oplus \mathbb{Z}\binom{0}{r}\right) \;\cong\; \mathbb{Z}/r$$

となることから, $K$ の Heegaard 分解における Heegaard 曲面の貼り合わせが写像が

$$\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．よって $K$ は Euler 数 $e = r$ をもつ $\mathbb{CP}^1$ 上の $S^1$ 束の全空間である．すなわち, $K \cong L(r,1)$ となる．

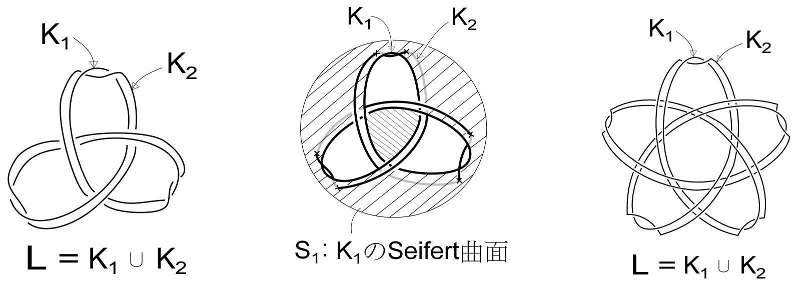
## 4.3 Geometric linking number

$p, q$ を互いに素な 2 以上の整数で, $p < q$ を満たすとする. 2 変数多項式 $f = z_0^{2p} + z_1^{2q}$ によって定まる 2 成分のリンクを $L$ とし, その各成分を $K_1$, $K_2$ とする. $L$, $K_1$, $K_2$ に対する Seifert 曲面を $S$, $S_1$, $S_2$, ミルナーナンバーをそれぞれ $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ ($\mu_1 = \mu_2$) とする. このとき, $K_1$, $K_2$ は $(p, q)$ 型トーラス結び目となり, $L$ は $K_1$ と $K_2$ が $\mathrm{lk}(K_1, K_2) = pq$ で絡んでいる絡み目となる. またミルナーナンバーは, $\mu = (2p-1)(2q-1)$, $\mu_1 = \mu_2 = (p-1)(q-1)$ となる.

**例 4.3.** $f = z_0^4 + z_1^6,\ z_0^6 + z_1^{10}$

$(p, q) = (2, 3)$ の場合. $K_1$, $K_2$ は trefoil となり, $L$ は二つの trefoil が $\mathrm{lk}(K_1, K_2) = 6$ で絡んでいる絡み目となる. $L$ と, $K_1$ に対する Seifert 曲面 $S_1$ をかくと下の図のようになる. すると, $S_1$ と $K_2$ が $S^3$ 内で 6ヶ所で交わり, $S_1$ と $S_2$ は $D^4$ 内で 6ヶ所で交わることがわかる. また, $\mu = (4-1)(6-1) = 15, \mu_1 = \mu_2 = (2-1)(3-1) = 2$ である.

$(p, q) = (3, 5)$ の場合. $K_1$, $K_2$ は $(3, 5)$ 型トーラス結び目, $L$ は二つの $(3, 5)$ 型トーラス結び目が絡み数 $\mathrm{lk}(K_1, K_2) = 15$ で絡んでいる絡み目となる. また, $\mu_1 = (3-1)(5-1) = 8$, $\mu_2 = (6-1)(10-1) = 45$ である.




三つの Seifert 曲面 $S, S_1, S_2$ の関係を示したのが次の命題 4.4 である.

**命題 4.4** (O)**.** $S$ は, $S_1$ と $S_2$ の交点において平滑化を施すことで得られる.

**証明.** 定理 2.2 より, $S$ は, 十分小さい $c$ について, 方程式 $z_0^{2p} + z_1^{2q} = c$ によって定められる. $z_0^{2p} + z_1^{2q} = (z_0^p + iz_1^q)(z_0^p - iz_1^q)$ と因数分解でき, 十分小さい $\sigma$, $\tau$ ($\sigma \neq \tau$) について, 方程式 $z_0^p + iz_1^q = \sigma$, $z_0^p - iz_1^q = \tau$ が二つの Seifert 曲面 $S_1, S_2$ を定める. ゆえに, $S_1, S_2$ の交点数を求めるには, 連立方程式

$$\begin{cases} z_0^p + iz_1^q = \sigma \\ z_0^p - iz_1^q = \tau \end{cases}$$

の解の個数を求めればよい. これを解くと $z_0^p = (\sigma + \tau)/2 \neq 0, z_1^q = (\sigma - \tau)/2i \neq 0$ となるので, 重複度を込めて, 解は $pq$ 個ある. 二つの Seifert 曲面 $S_1$, $S_2$ は, その共有点において横断的に交わっていることがわかり, 解の重複度はすべて 1 となるので, 二つの Seifert 曲面の交点は $pq$ 個である. 二つの曲面がその交点において横断的に交わっていることから, 平滑化という操作は, 位相的には連結和と同じ操作である.

1 回の平滑化により Euler 標数は 2 減り, $pq$ 回の平滑化により Euler 標数は $2pq$ 減るように思える. しかし, 1 回目の平滑化では $S_1$, $S_2$ を連結させているため, Euler 標数は 1 しか減らない. よって, Euler 標数は $2pq - 1$ 減る. ゆえに, $pq$ 回の平滑化により, ミルナーナンバーは $2pq - 1$ だけ増える. 一方, 定理 2.2 により, $\mu = (2p-1)(2q-1)$, $\mu_1 + \mu_2 = 2(p-1)(q-1)$ であり, その差を考えると $\mu - (\mu_1 + \mu_2) = 2pq - 1$ となり, 一致する. $\square$

**定義 4.5** (O)**.** $L=(K_1,K_2)$ を 2 成分リンクとする. $K_1$ と $K_2$ の位相型を保ち, $K_1$ と $K_2$ を分離するために, それぞれ isotopy 変形させるときに必要な交叉変形回数の最小値を **geometric linking number** と呼び, それを $\mathrm{glk}(K_1,K_2)$ と表す.

Geometric linking number $\mathrm{glk}(K_1,K_2)$ に対しては, $K_1$, $K_2$ の絡み数 $\mathrm{lk}(K_1,K_2)$ によって, $\mathrm{glk}(K_1,K_2) \geq |\mathrm{lk}(K_1,K_2)|$ という下からの評価が得られている.

**予想 4.6** (O)**.** $L=(K_1,K_2)$ を多項式 $f=z_0^{2p}+z_1^{2q}$ によって定まる 2 成分のリンクとするとき, $\mathrm{glk}(K_1,K_2)=\mathrm{lk}(K_1,K_2)=pq$ が成り立つ.

この予想 4.6 は, $(p,q)=(2,3)$, $(3,5)$ のときは正しいことが確かめられている.

## 5 モノイダル変換 (blowing up) による特異点解消

これまで複素超曲面 $f^{-1}(0)$ が原点に孤立特異点をもつ場合を考えてきた. そしてその特異点を調べるために $f$ に付随したミルナーファイブレーション $\phi$ やミルナーファイバー $F_\theta$ と特異点のリンク $K$ のトポロジーについて考えてきた. ここでは blowing up という方法で特異点を解消し, そのとき新たに生じたトポロジーによって特異点を調べる.

## 参考文献


[1] **J.W.Milnor**, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies **61**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1968) (邦訳あり)

[2] **J.W.Milnor**, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1963) (邦訳あり)

[3] **松本幸夫**, モース理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 **27**, 岩波書店, (1997)

[4] **R.Hartshorne**, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977) (邦訳あり)

[5] **小林昭七**, 複素幾何 1 , 岩波講座 現代数学の基礎 **29**, 岩波書店, (1997)

[6] **小林昭七**, 複素幾何 2 , 岩波講座 現代数学の基礎 **30**, 岩波書店, (1998)

[7] **森田茂之**, 微分形式の幾何学, 岩波書店, (2005)

[8] **N.E.Steenrod**, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Mathematical Series **14**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1951) (邦訳あり)

[9] **服部晶夫**, 位相幾何学, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, (1991)

[10] **加藤十吉**, 位相幾何学, 数学シリーズ, 裳華房, (1988)

[11] **I.M. シンガー/J.A. ソープ**, 赤攝也監訳, 松江広文/一楽重雄共訳, トポロジーと幾何学入門, 培風館, (1976)