射影空間における二つの二次超曲面の交わりについて
On the intersection of two quadratics in a projective space

数学専攻　金子　靖弘
Yasuhiro KANEKO

序

本論文は硲文夫「代数幾何学」(森北出版) の第５章に基づく総合報告である．この章では二つの射影二次超曲面の交わりが非特異完全交差であるための条件が美しい形で示されている．ただ，二次超曲面は実数係数で定義されているのに，射影変換は複素数の範囲まで広げて定理を証明していて，定式化が不充分であるとの印象から免れない．本論文では，標数が２とは異なる一般の代数的閉体の上で証明を与えた．

論文は４節からなっているが，第１節では射影空間，射影多様体などの基本的な概念について復習した．第２節では一般の体の上での二次形式について基本事項をまとめた．特に，二次形式をもつ有限次元線型空間が直交基底をもつという二次形式の基本定理がこの節の主眼である．この定理は第４節での議論の根拠であり,「代数幾何学」での議論を一般化するために不可欠である．第３節では二次形式に関する Witt の拡張定理についてまとめた．その応用として，実対称行列では周知の Sylvester の慣性律と有限体の上の二次形式の分類についてふれた．第４節が本論文の中心であるが,「代数幾何学」の論述に従って，二つの射影次超曲面の交わりが非特異完全交差であるための条件について説明した．ただ，著者のうっかりであろうが，A，B が n 次実対称行列であるとき，AB もまた対称行列であるという間違った主張の下で証明を進めているために，ここの修正が必要であった．また，複素数まで成分の範囲を広げた時に，対角化できない対称行列が存在するので，著者の議論はここでも頓挫する．ここの難点は多少技巧的であるにしても回避できた．

1　準備

定義 1.1. (アファイン空間) K を体とする．直積 $K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ ;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in K\}$ を K の上の n 次アファイン空間ともいい，$\mathbb{A}^n(K)$ で表わす．

定義 1.2. (射影空間) K を体とする．$(a_0, a_1, \ldots, a_n), (b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}$ に対して $\lambda \in K^\times = K - \{0\}$ が存在して $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (\lambda b_0, \lambda b_1, \ldots, \lambda b_n)$ となるとき，$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \sim (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ と定義すれば，$\sim$ は $\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}$ の上の同値関係．商集合 $(\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\})/\sim$ を K の上の n 次元射影空間といい，$\mathbb{P}^n(K)$ で表わす．$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ の $\mathbb{P}^n(K)$ における代表類を $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ で表わす．

定義 1.3. (射影多様体) 同次多項式 $F_1, \ldots, F_m \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ に対して

$$\{(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n(K)\ ;\ F_1(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots, F_m(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

によって定義される $\mathbb{P}^n(K)$ の部分集合を $F_1, \cdots, F_m$ によって定義される射影多様体とよび，$V(F_1, \ldots, F_m)$ と記す．特に，$F \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ が N 次同次多項式であるとき，$V(f)$ を $\mathbb{P}^n(K)$ の N 次超曲面という．

定義 1.4. (射影変換) K を体とし，

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n+1, K)$$

とする．対応

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n)$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

によって定義される写像 $\mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ を $A \in GL(n+1, K)$ が定める $\mathbb{P}^n(K)$ の射影変換という．

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ の射影変換の全体を $PGL(n+1, K)$ と記す．このとき，$PGL(n+1, K)$ は写像の合成に関して群となる．

定理 1.5. A を n 次実対称行列，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値をする．このとき，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は実数．さらに，n 次直交行列 P が存在して

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

となる．

定義 1.6. K を体，E を K の上の線型空間とし，$Q : E \to K$ を写像とする．次が成立するとき，Q は E の上の二次形式であるという．

(1) $Q(ax) = a^2 Q(x)$ $(a \in K,\, x \in E)$,

(2) $(x, y) \mapsto Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ は E の上の双線型形式．

以下，K は標数 $\neq 2$ と仮定する．

定義 1.7. E を K の上の線形空間，Q を E の上の二次形式とする．E の線型部分空間 F に対して

$$F^{\perp} = \{x \in E\,;\ すべての\ y \in F\ に対して\ Q(x, y) = 0\}$$

と記す．$F^{\perp}$ は E の線型部分空間．

以下，E は有限次元であると仮定する．

定義 1.8. (E, Q) を K の上の二次形式とする．$\dim E - \dim E^{\perp}$ を Q の階数といい，$\mathrm{rk}\, Q$ で表わす．

定義 1.9. (E, Q) を K の上の二次形式，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を E の基底とする．$i \neq j$ なら，$Q(e_i, e_j) = 0$ となるとき，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ は (E, Q) の直交基底であるという．

定理 1.10. (E, Q) は直交基底をもつ．

言い換え 1.11. K を標数 $\neq 2$ の体，$A \in M(n, K)$ を対称行列とする．このとき，$P \in GL(n, K)$ が存在して ${}^tPAP$ は対角行列となる．

定義 1.12. (E, Q) を K の上の二次形式とし，$x \in E$ とする．$Q(x) = 0$ のとき，x は等方的であるという．

定理 1.13. (Witt の拡張定理) (E, Q), (E', Q') を K の上の同型な非退化二次形式，F を E の線型部分空間，$\varphi : F \to E'$ を線型写像とする．φ が単射で $Q = Q' \circ \varphi$ なら，φ は E から E' への二次形式の同型に拡張できる．

系 1.14. (Sylvester の慣性律) (E, Q), (E', Q') を $\mathbb{R}$ の上の非退化二次形式とする．このとき，(E, Q'), (E, Q') が同型 $\Leftrightarrow$ Q, Q' の符号型が一致する．

2　二つの二次超曲面の交わり

定義 2.1. $f_1, \dots, f_m \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ を同次多項式とし，$V = V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^n$ とおく．行列

$$J_V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を V の Jacobi 行列とよび，$J_V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ で表わす．

定義 2.2. 各 $P \in V = V(f_1, \dots, f_m)$ に対して $\operatorname{rk} J_V(P) = m$ となるとき，V は非特異完全交差であるという．

命題 2.3. K を標数 $\neq 2$ の体，$A = (a_{ij}) \in M(n+1, K)$ を対称行列とし，$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$, $V_A = V(f)$ とおく．このとき，V_A が非特異超曲面 $\Leftrightarrow$ A が正則．

証明. 定義から，超曲面 V_A が非特異 $\Leftrightarrow$ 各 $P \in V_A$ に対して $J_{V_A}(P) \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ 各 $P = (c_0 : c_1 : \dots : c_n) \in V_A$ に対して $(c_0\ c_1\ \dots\ c_n)A \neq (0\ 0\ \dots\ 0)$.

ここで，A が正則であると仮定すると，任意の $\boldsymbol{c} \in K^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して ${}^t\boldsymbol{c}A \neq {}^t\mathbf{0}$．したがって，$V_A$ は非特異超曲面．

一方，A が正則でないと仮定すると，$\boldsymbol{c} \in K^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在して ${}^t\boldsymbol{c}A = {}^t\mathbf{0}$ となる．このとき，${}^t\boldsymbol{c}A\boldsymbol{c} = 0$. したがって，

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},\ P = (c_0 : c_1 : \dots : c_n)$$

とおけば，$P \in V_A$．ここで，$J_{V_A}(P) = 2{}^t\boldsymbol{c}A = \mathbf{0}$ なので，P は超曲面 V_A の特異点.

定理 2.4. K を標数 $\neq 2$ の体，$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in GL(n+1, K)$ を対称行列とし，$V_{A,B}$: ${}^txAx = 0$, ${}^txBx = 0$ とする．このとき，次は同値.
(a) $V_{A,B}$ は非特異完全交差.
(b) λ に関する方程式 $\det(\lambda A - B) = 0$ は重根をもたない.
(c) $V_{A,B}$ は適当な射影変換によって 2 つの二次超曲面

$$x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 0,\ d_0x_0^2 + \cdots + d_nx_n^2 = 0\ (d_0, \dots, d_n \text{ は互いに異なる})$$

の交わりに変換される.

証明の方針.
(a)$\Rightarrow$(b) K が代数的閉体で A が正則なので，${}^tPAP = I$ となるような $P \in GL(n+1, K)$ が存在する.

$$\det(\lambda{}^tPAP - {}^tPBP) = (\det P)^2 \det(\lambda A - B)$$

なので，A を ${}^tPAP = I$ に取り換えることによって $A = I$ としてよい.

λ に関する方程式 $\det(\lambda A - B) = 0$ は重根をもつと仮定する．$\bar{\lambda}$ を $\det(\lambda A - B) = 0$ の重根とする. $C = \bar{\lambda}A - B$ とおく.

(1) $C\boldsymbol{a}=0, C\boldsymbol{b}=0$ となるような一次独立な $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in K^{n+1}$ が存在する場合．$Q=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ とおき，K が代数的閉体だということを利用することがポイントである．

(2) $C\boldsymbol{a}=0, C\boldsymbol{b}=0$ となるような一次独立な $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in K^{n+1}$ が存在しない場合．C の固有値 0 の重複度が 2 以上なので，$C\boldsymbol{a}\neq 0, C^2\boldsymbol{a}=0$ となるような $\boldsymbol{a}\in K^{n+1}$ が存在する．$\boldsymbol{c}=C\boldsymbol{a}$ とおき，$A=I$ を利用することがポイントである．

(b)⇒(c) $P\in GL(n,K)$ が存在して

$$ {}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix},\ {}^tPBP=\begin{pmatrix}d_0&0&\dots&0\\0&d_1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&d_n\end{pmatrix}\ (d_0,d_1,\dots,d_n\text{ は相異なる}) $$

となることを示せばよい．

仮定から，$n+1$ 次方程式 $\det(\lambda A-B)=0$ は相異なる根 $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ をもつ．このとき，

$$ (\lambda_0A-B)e_0=\mathbf{0},\ (\lambda_1A-B)e_1=\mathbf{0},\dots,\ (\lambda_nA-B)e_n=\mathbf{0} $$

となるような列ベクトル $e_0,e_1,\dots,e_n\in K^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する．ここで，

$$ \det(\lambda A-B)=\det A\ \det(\lambda I-A^{-1}B) $$

なので，$e_0,e_1,\dots,e_n$ はそれぞれ $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を固有値とする $A^{-1}B$ の固有ベクトルに他ならない．$\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ が相異なるので，$e_0,e_1,\dots,e_n$ は一次独立．したがって，

$$ P=(e_0\ e_1\ \dots\ e_n)\in GL(n+1,K) $$

とおけば，P は正則．以上がポイントである．

(c)⇒(a)

$$ A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}d_0&0&\dots&0\\0&d_1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&d_n\end{pmatrix} $$

とおく．$V_{A,B}$ が非特異完全交差でなかったと仮定し，背理法によって証明する．

$$ \operatorname{rk}J(V_{A,B})(c_0,c_1,\dots,c_n)\leq 1 $$

となるような $(c_0:c_1:\dots:c_n)\in V_{A,B}$ が存在する．このとき，

$$ \operatorname{rk}\begin{pmatrix}2c_0&2c_1&\dots&2c_n\\2d_0c_0&2d_1c_1&\dots&2d_nc_n\end{pmatrix}\leq 1 $$

なので，$(c_0\ c_1\ \dots\ c_n), (d_0c_0\ d_1c_1\ \dots\ d_nc_n)$ は一次従属．ここで，$(c_0,c_1,\dots,c_n)\neq(0,0,\dots,0)$ なので，

$$ \mu(c_0\ c_1\ \dots\ c_n)+(d_0c_0\ d_1c_1\ \dots\ d_nc_n)=(0\ 0\ \dots\ 0) $$

となるような $\mu\in K$ が存在する．以上がポイントである．

参考文献

[1] 硲文夫，代数幾何学，森北出版

[2] 関野薫，代数学と幾何学，学生社

[3] ２次形式，田坂隆士，岩波書店