関数解析の基本理論とその定常 Navier-Stokes 方程式への応用

数学専攻・高橋裕

1 導入

G を $\mathbb{R}^3$ の境界が滑らかな空でない領域とする. G 内の非圧縮性粘性流体の定常的な運動は次の Navier-Stokes 方程式によって記述される.

$$\begin{aligned} -\eta\Delta v + \rho(v\cdot\nabla)v &= K - \nabla p \quad \text{on } G \text{ (運動方程式)},\\ \nabla\cdot v &= 0 \quad \text{on } G \text{ (非圧縮性条件)},\\ v &= 0 \quad \text{on } \partial G \text{ (境界条件)}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで,
$v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ は点 x における流体の速度ベクトル,
$p(x)$ は点 x における圧力,
ρ は流体の定数密度,
$K(x) = (K_1(x), K_2(x), K_3(x))$ は点 x で働く外力,
η は粘性率（正の定数）
である.
この総合報告では Ladyženskaya[2], Foiaş-Temam[1] に従って, 関数解析のいくつかの基本的な定理を応用して, (1) の一般化解 $v \in X$ の一意存在と解の個数の有限性について論ずる.

2 基本定理の紹介

上のことを論ずるために必要になる関数解析の基本的な定理を 3 つ紹介する.
定理 2.1 (M. Riesz の定理)
X を 実 Hilbert 空間で, X^* をその双対空間とする. このとき f が X^* の要素であることと, v が存在して, 任意の $u \in X$ に対して $f(u) = (u, v)$ となることは同値である. ここで X の要素 v は f に対して一意的に決まる. また, $\|f\| = \|v\|$ となる.

以下この節では $X,\ Y$ を実 Banach 空間とする.
定理 2.2 (アプリオリ評価に関する Leray-Schauder の原理)
非線形コンパクト作用素 $A : X \to X$ がアプリオリ評価を満たすとする. このとき方程式 $u = Au$ は解 $u \in X$ を持つ.
ただし, 次が成り立つとき方程式 $u = Au$ に対してアプリオリ評価が成り立つという:
$r > 0$ が存在して, 方程式 $u(t) = tAu(t) \quad (0 \le t < 1)$ の解 $u(t) \in X$ に対し, 常に $\|u(t)\| \le r$ が成り立つ.
また, A が次の (i), (ii) を満たすときに A はコンパクト作用素であるという.
(i) A は X 上で連続である.
(ii) X の任意の有界集合 S に対して, $A(S)$ の閉包が X でコンパクトになる.
この定理は $t \in [0, 1)$ で $u = Au$ が解を持つとき, $t = 1$ でも解を持つということを主張している.

3 番目の Smale の原理を述べるために，3 つの定義を与える．

定義 2.3 (線形 Fredholm 作用素)

作用素 $A : X \to Y$ が線形連続で, かつ $\dim\ N(A) < \infty,\ \mathrm{codim}\ R(A) = \dim Y/R(A) < \infty$ を満たすとする．このとき A を線形 Fredholm 作用素と呼び, また A の指数を

$$\mathrm{ind}\ A := \dim\ N(A) - \mathrm{codim}\ R(A)$$

で定義する．

定義 2.4 (非線形 Fredholm 作用素)

U を開集合として $A : U \subseteq X \to Y$ を C^1 級写像とする．A が Fredholm 作用素であるということを, 任意の $u \in U$ に対して Fréchet 微分 $A'(u) : X \to Y$ が線形 Fredholm 作用素になることで定義する．

$U = X$ の時 $\mathrm{ind}\ A := \mathrm{ind}\ A'(u)$ は $u \in U$ によらない．

定義 2.5 (固有な作用素)

$A : U \subseteq X \to Y$ が固有ということは, Y の任意のコンパクト集合 C に対し, その原像 $A^{-1}(C)$ もコンパクトになることである．

定理 2.6 (Smale の原理)

C^1 級作用素 $A : X \to Y$ を固有で指数 0 の Fredholm 作用素とする．任意の $w_0 \in Y$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\|w - w_0\| < \varepsilon$ を満たす $w \in Y$ が存在して, $Au = w$ は高々有限個の解 $u \in X$ を持つ．

3 一般化問題

この節では一般化問題について説明する． $W_2^1(G) = \{u \in L_2(G) \mid \partial_j u \in L_2(\Omega),\ j = 1,\ 2,\ 3\}$ で, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ は $W_2^1(G)$ での $C_0^\infty(G)$ の閉包とする．

$\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$,

$D := \{\phi \in C_0^\infty(G) \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j \phi_j = 0\}$, X は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ での空間 D の閉包とする. ただし, $\mathcal{H}$ と X の内積は

$$(v \mid w) := \int_G \nabla v \cdot \nabla w dx = \int_G \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \partial_j v_m \partial_j w_m dx, \quad v = (v_1, v_2, v_3),\ w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{H}$$

で定義する．

命題 3.1 (速度場)

$v \in X$ とする．

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0 \quad \text{on } G \text{ (非圧縮性条件)}, \\ v &= 0 \quad \text{on } \partial G \text{ (境界条件)} \end{aligned}$$

が一般化された意味で成立する．

外力 K に対し,

$$K(w) := \int_G K \cdot w dx = \int_G \sum_{j=1}^{3} K_j w_j dx \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{H}$$

を $\mathcal{H}$ 上の汎関数とする. さらに, $u,\ v,\ w \in X$ に対して,

$$a(u,v,w) := -\int_G u \cdot (v \cdot \nabla) w dx = -\int_G \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} u_m v_j \partial_j w_m dx$$

と定める.

定義 3.2

$\eta > 0,\ \rho > 0$ とする. 外力 $K \in \mathcal{H}^*$ が与えられたとき, 任意の $\phi \in D$ に対して次の式を満たす速度場 $v \in X$ を求める問題を (1) の一般化問題と呼ぶ.

$$\eta(v \mid \phi) + \rho a(v,v,\phi) = K(\phi). \tag{2}$$

また, 一般化問題の解を一般化解と呼ぶ. 一般化解に対して, 元の問題の解を古典解と呼ぶ. 古典解は常に, 一般化解であるが, 一般化解が古典解となるためには外力と境界が十分滑らかという条件が必要となる.

4 関数解析からの命題

解の一意存在性を示すために一般的な関数空間での抽象的な命題を用意する.

命題 4.1

次の (H1)-(H5) を仮定する.

(H1) $\mathcal{H}$ と Z は実 Hilbert 空間とし, 埋め込み $\mathcal{H} \subseteq Z$ が連続, $\mathcal{H}$ が Z で稠密とする.

(H2) X は $\mathcal{H}$ の閉線形部分空間, D は X の稠密な部分空間で, X の内積を $(\cdot \mid \cdot)$ とする.

(H3) Y を埋め込み $X \subseteq Y$ がコンパクトな実 Banach 空間とする.

(H4) $a : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ は三重線形である. (つまり, 各成分について線形である.) さらに, 任意の $u, v, w \in X$ に対して,

$$\mid a(u,v,w) \mid \leq \mathrm{const} \|u\|_Y \|v\|_Y \|w\|_X$$

が成り立つ.

(H5) 任意の $v \in D$ に対して, $a(v,v,v) = 0$ が成り立つ.

さらに $\eta > 0$, $\rho > 0$ とする. このとき汎関数 $K \in \mathcal{H}^*$ を与えると, 次の (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) (存在性) 次の方程式は解 $v \in X$ を持つ.

$$\eta(v \mid \phi) + \rho a(v,v,\phi) = K(\phi) \quad {}^\forall \phi \in D. \tag{3}$$

(ii) (一意性) 汎関数 K のノルムが十分小さいとき解 v は一意となる.

(iii) (解の個数の有限性) $\mathcal{H}^*$ の稠密な開集合 $\mathcal{H}_0^*$ が存在して, $K \in \mathcal{H}_0^*$ に対して (3) の解 $v \in X$ は有限個である. また, 共通集合 $\mathcal{H}_0^* \cap Z$ は Z で開かつ稠密となる.

証明の流れは次のようになっている. M. Riesz の定理によって適当な作用素 $A : X \to X$ が存在して, (3) は作用素方程式

$$\eta v + \rho A v = K_* \quad v \in X \tag{4}$$

に書き変えることが出来る. 次に Leray-Schauder の原理を (4) に適用すると (i), (ii) が得られる.
さらに Smale の原理を使うと (iii) も得られる.

5 存在定理

命題 4.1 を使うために, $\mathcal{H},\ D,\ X$ と $K \in \mathcal{H}^*,\ a : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ をそれぞれ 3 節で定めたものとし, さらに

$$Z := L_2(G) \times L_2(G) \times L_2(G),\ Y := L_4(G) \times L_4(G) \times L_4(G)$$

とする. また Z の内積と Y のノルムを

$$(K \mid L)_Z := \sum_{j=1}^{3} \int_G K_j L_j dx,\ \| v \|_Y := \sum_{j=1}^{3} (\int_G {u_j}^4 dx)^{\frac{1}{4}}$$

とする. このとき命題 4.1 の仮定 (H1)-(H5) が満たされるので, 命題 4.1 より次の定理が言える.

<u>定理 5.1</u>
G を $\mathbb{R}^3$ 内の境界が滑らかな空でない有界領域とする. $\rho > 0$ と $\eta > 0$ とする. 与えられた外力 $K \in \mathcal{H}^*$ に対して, 次の (i), (ii), (iii) が成立する.
(i) (存在性) 一般化問題 (2) は解 $v \in X$ を持つ.
(ii) (一意性) 無次元量

$$\frac{\rho}{\eta^2} \| K \|_{\mathcal{H}^*}$$

が十分小さいとき, 解 $v \in X$ は一意である.
(iii) (解の個数の有限性) $\mathcal{H}^*$ の稠密な開集合 $\mathcal{H}_0^*$ が存在して, 全ての外力 $K \in \mathcal{H}_0^*$ に対して, 一般化問題 (2) の解 $v \in X$ は有限個である.

(i), (ii) は O. A. Ladyženskaya(1959) によって, (iii) は C. Foiaş and R. Temam(1977) によって与えられた.

参考文献

[1] C. Foiaş and R. Temam, Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math. , 30 no. 2, pp149-164, 1977.

[2] O. A. Ladyženskaya, Investigation of the Navier-Stokes equation for stationary motion of an incompressible fluid, Uspehi Mat. Nauk, 14 no. 3, pp75-97, 1959.

[3] E. Zeidler, Applied Functional Analysis, Main Principles and Their Applications, Springer, 1991.

[4] E. Zeidler, Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics, Springer, 1991.