

# 低次元複素多様体のモース理論

## Morse theory on low dimensional complex manifolds

数学専攻 土屋 拓哉  
TSUCHIYA Takuya

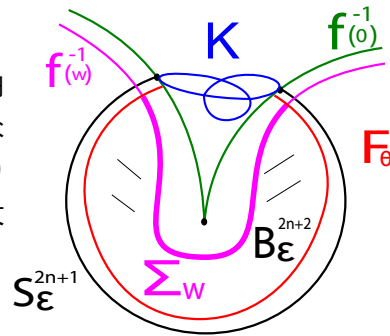
### 1 ミルナーファイブレーション定理, ミルナーファイバー

複素数  $n+1$  変数多項式  $f$  に対して  $f^{-1}(0) = V$  は特異超曲面である.  $V$  と半径の十分小さい  $2n+1$  次元球面の交わり  $V \cap S_\varepsilon^{2n+1} = K$  を特異点のリンクという.

定理 1.1 (ミルナーファイブレーション).  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  に対して, 空間  $S_\varepsilon \setminus K$  は  $S^1$  上の可微分ファイバー束であり, 射影は  $\phi(z) = f(z)/|f(z)|$  で与えられる.

このファイバー束はミルナーファイブレーションという. またそのファイバー  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon \setminus K$  はミルナーファイバーといい,  $F_\theta$  は平行化可能な  $2n$  次元可微分実多様体である.

複素数  $w \neq 0$  が十分ゼロに近ければ複素超曲面  $f^{-1}(w)$  と開  $\varepsilon$  円板との交わり  $f^{-1}(w) \cap B_\varepsilon^{2n+2}$  は, ファイバー  $F_\theta$  に微分同相な可微分多様体である. このとき  $f^{-1}(w)$  と開  $\varepsilon$  円板との交わり  $f^{-1}(w) \cap B_\varepsilon^{2n+2}$  もミルナーファイバーといい,  $\Sigma_w$  とおく. この論文ではこれをミルナーファイバーとする.



$F_\theta$  は  $n$  次元球面のブーケ  $S^n \vee \dots \vee S^n$  のホモトピー型をもつ.  $df = (\partial f/\partial z_0, \dots, \partial f/\partial z_n)$  の写像度をミルナー数  $\mu$  といい, ブーケの個数はミルナー数と一致している.

### 2 Andreotti-Frankel の定理

原点からの距離関数をモース関数としてミルナーファイバー上でモース理論を適用する.

定理 2.1 (Andreotti-Frankel).  $W$  を  $\mathbb{C}^N$  内の  $n$  次元複素部分多様体とするとき,  $\mathbb{C}^N$  上の座標系を  $(z_1, z_2, \dots, z_N)$  とし,  $g$  を  $g(z_1, z_2, \dots, z_N) = \|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_N|^2$  によって定まる  $W$  から  $\mathbb{R}$  への写像とする. このとき  $g$  の任意の臨界点  $P$  に対して,  $Ind(g, P) \leq n$  である.

Andreotti-Frankel の定理はミルナーによって幾何的に明快な証明が記述されているが論文では線形代数の観点から極めて単純化された証明を記述している. 元の論文 (Andreotti-Frankel [4]) はこの証明に近いことを述べている.

$f^{-1}(w)$  にこの定理を適用する. これ以降モース関数として距離関数の二乗を用いる.

### 3 モース理論とミルナー・ファイバー

ミルナーファイバー上のモース関数をハンドルスライディングで消さないで考えると良いこともあるということがわかる。モース関数に従って臨界点を考察していくとザイフェルト曲面の良い表示が得られる。これ以降、 $f$  を複素二変数多項式とする。特に  $f = z_0^p + z_1^q$  に対して特異点のリンク  $K$  とミルナーファイバーについて考察する。サーストン-ノルムという理論から  $F_\theta$  は  $K$  の最小種数のザイフェルト曲面であるという定理がある。また  $F_\theta$  はブーケ  $S^1 \vee \cdots \vee S^1$  のホモトピー型をもつ。このときブーケの個数はミルナー数と一致している。

#### 3.1 複素二変数多項式 $f = z_0^2 + z_1^q$ , $q > 2$ , $2$ と $q$ は互いに素のとき

命題 3.1. ミルナーファイバー上に  $q + 2$  個の臨界点がある。

系 3.2. モース index 0 の臨界点の数は 2 個であり、モース index 1 の臨界点の数は  $q$  個である。

#### 3.2 ホモロジー群のランクと臨界点の数

ミルナー数  $\mu = (2 - 1)(q - 1) = q - 1$  である。ゆえにミルナーファイバー  $F_\theta$  は  $q - 1$  個のブーケのホモトピー型をもつ。このときブーケの個数は 1 次元のホモロジー群のランク  $\text{rk}(H_1(\Sigma_w; \mathbb{Z}))$  と一致している。またブーケの一点と 0 次元のホモロジー群のランク  $\text{rk}(H_0(\Sigma_w; \mathbb{Z}))$  が対応している。モースの不等式より、 $\text{rk}(H_1(\Sigma_w; \mathbb{Z})) \leq (\text{index 1 の臨界点の数})$  であり、 $\text{rk}(H_0(\Sigma_w; \mathbb{Z})) \leq (\text{index 0 の臨界点の数})$  である。臨界点の数とホモロジー群のランクの差は  $q - (q - 1) = 1$  であり、 $2 - 1 = 1$  である。index 0 の臨界点 1 個と index 1 の臨界点 1 個はハンドルスライディングで消去していると考えられる。しかしモース関数をハンドルスライディングで消去せずに、ここでは臨界点の対称性とハンドルの境界の向きを考慮してハンドル分解を行う。ミルナーファイバーの境界は  $(2, q)$  型トーラスノットになる。このときザイフェルト曲面の表示を与える。

#### 3.3 $(2, q) = (2, 3)$ のときの例

$f = z_0^2 + z_1^3$  に対してミルナーファイバー  $f^{-1}(w)$  について考える。 $z_1 = 0$  のとき  $z_0 = (w)^{1/2}$  であり、 $z_0 = 0$  のとき  $z_1 = (w)^{1/3}$  である。臨界点の数は  $2 + 3 = 5$  である。index 0 の臨界点の数は 2 であり、index 1 の臨界点の数は 3 である。次のようにモース関数にしたがって見ていく。 $z_1 = 0$  のとき原点を通る  $z_0$  軸にモース index 0 の臨界点が 2 点ある。モース関数のレベルが上がると下図 1 のようにモース index 0 の臨界点を中心とする円板になる。 $z_0 = 0$  のとき  $z_1$  平面にモース index 1 の臨界点が 3 点ある。さらにモース関数のレベルが上がるとある時点で二つの円板が交わる。その交わる点が 3 点あり、それらがモース index 1 の臨界点に対応する。下図 2 のようにみえる。さらにモース関数のレベルが上がったとき、すべてのモース index 1 の臨界点に対して向きを考慮し、バンドをツイストし、さらにスムージングしてハンドルを接着する。モース index 0 の臨界点を中心とする 2 つの円板の境界にモース index 1 の臨界点をもつハンドルを 3 つ接着させたものを下図 3 のように簡単に表示する。この向きにしたがって境界をみていく。それはトーラス上できれいに表示できる。それは下図 4 のような  $(2, 3)$  型トーラスノットである。したがってモース index 0 の臨界点を中心とする 2 つの円板の境界にモース index 1 の臨界点をもつハンドルを 3 つ接着させた表示がザイフェルト曲面を与える。

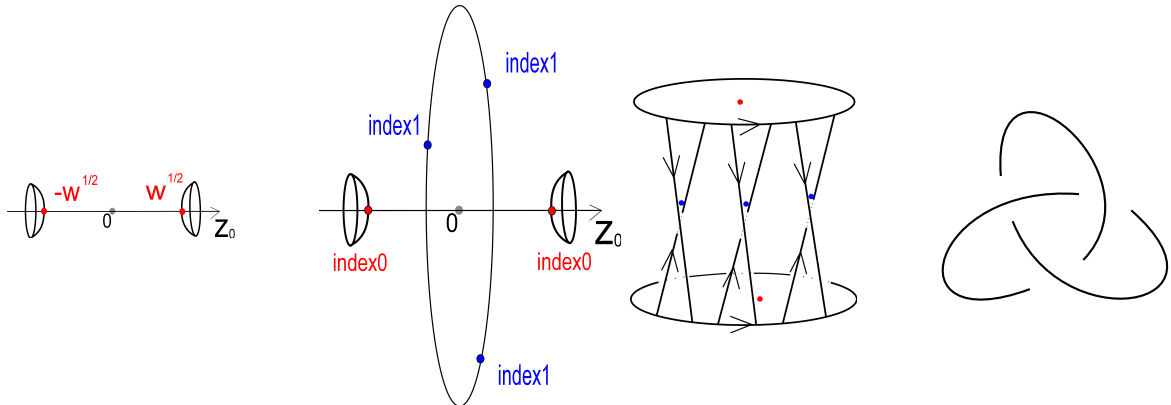


図 1

図 2

図 3

図 4

### 3.4 複素二変数多項式 $f = z_0^p + z_1^q$ , $q > p \geq 3$ , $p$ と $q$ は互いに素のとき

命題 3.3. ミルナーファイバー上に  $pq + p + q$  個の臨界点がある.

系 3.4. モース index 0 の臨界点の数は  $p + q$  個であり, モース index 1 の臨界点の数は  $pq$  個である.

### 3.5 ホモロジー群のランクと臨界点の数

ミルナー数  $\mu = (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1$  である. ゆえにミルナーファイバー  $F_\theta$  は  $pq - p - q + 1$  個のブーケのホトピー型をもつ. このときブーケの個数は 1 次元のホモロジー群のランク  $\text{rk}(H_1(\Sigma_w; \mathbb{Z}))$  と一致している. またブーケの一点と 0 次元のホモロジー群のランク  $\text{rk}(H_0(\Sigma_w; \mathbb{Z}))$  が対応している. モースの不等式より,  $\text{rk}(H_1(\Sigma_w; \mathbb{Z})) \leq (\text{index 1 の臨界点の数})$  であり,  $\text{rk}(H_0(\Sigma_w; \mathbb{Z})) \leq (\text{index 0 の臨界点の数})$  である. 臨界点の数とホモロジー群のランクの差は  $pq - (pq - p - q + 1) = p + q - 1$  と  $(p + q) - 1 = p + q - 1$  である. index 0 の臨界点  $p + q - 1$  個と index 1 の臨界点  $p + q - 1$  個はハンドルスライディングで消去していると考えられる. しかしモース関数をハンドルスライディングで消去せずに, ここでは臨界点の対称性とハンドルの境界の向きを考慮してハンドル分解を行う. ミルナーファイバーの境界は  $(p, q)$  型トーラスノットになる. このときザイフェルト曲面の表示を与える.

### 3.6 $(p, q) = (3, 5)$ のときの例

$f = z_0^3 + z_1^5$  に対してミルナーファイバー  $f^{-1}(w)$  について考える.  $z_1 = 0$  のとき  $z_0 = (w)^{1/3}$  であり,  $z_0 = 0$  のとき  $z_1 = (w)^{1/5}$  である. index 0 の臨界点の数は  $3 + 5 = 8$  であり, index 1 の臨界点の数は  $3 \cdot 5 = 15$  である. 次のようにモース関数にしたがって見ていく.  $\mathbb{C}^2$  内の 3 次元球面  $S^3$  を二つのソリッドトーラスによって  $S^3 \cong S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$  と表示する. それは下図 5 のようにみえる.  $z_1 = 0$  のとき  $z_0$  平面に index 0 の臨界点が 3 点あり,  $z_0 = 0$  のとき  $z_1$  平面に index 0 の臨界点が 5 点ある. モース関数のレベルが上がると index 0 の臨界点を中心とする円板になる. それぞれのソリッドトーラス上で  $z_1 = 0$  のときと  $z_0 = 0$  のとき円板が見える. 下図 6, 下図 7 のようにみえる. トーラスに着目するとトーラス上に  $S^1$  が見える. 下図 8, 下図 9 のようにみえる. モース関数のレベルがさらに上がるとある時点で  $z_1 = 0$  のときの円板と  $z_0 = 0$  のときの円板が交わる. それはトーラス上では  $S^1$  の交差で表示できる. 下図 10 のようにトーラス上に交点  $15$  点現れ

る. その交点がモース index 1 の臨界点である. ここでトーラスによって定まる向きを下図 11 のように  $S^1$  に与えておく. さらにモース関数のレベルが上がったとき, すべてのモース index 1 の臨界点に対してバンドをツイストし, さらにスムージングしてハンドルを向きに沿って接着する. それは下図 12 のように見える. 下図 13 のようにこの向きにしたがって境界をみていく. モース index 0 の臨界点を中心とする円板とそれに接着したハンドルの境界を下図 14 のように表示する. それは下図 15 のような (3, 5) 型トーラスノットである. したがってすべてのモース index 1 の臨界点に対してハンドルを向きに沿って接着させた表示がザイフェルト曲面を与える.

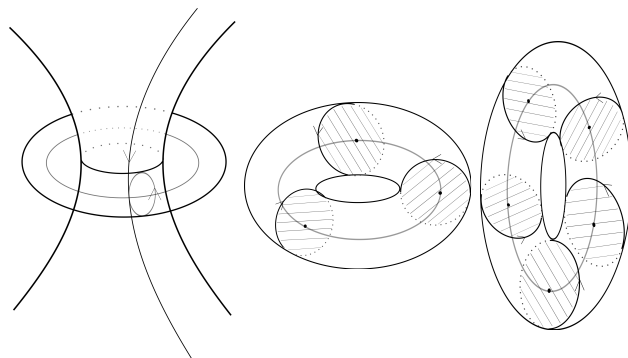


図 5

図 6

図 7

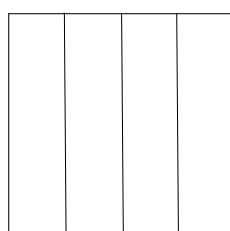


図 8

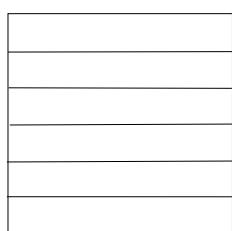


図 9

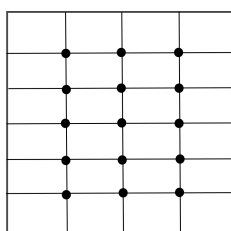


図 10

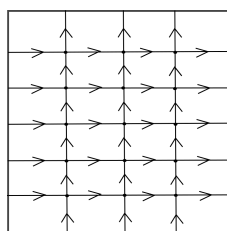


図 11

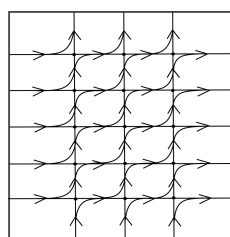


図 12

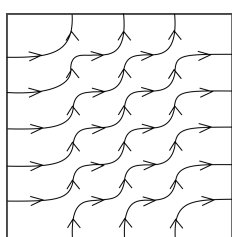


図 13

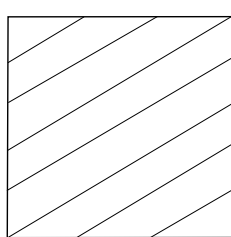


図 14

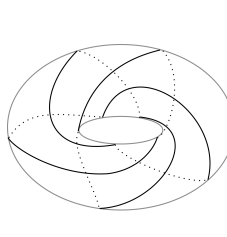


図 15

## 参考文献

- [1] 松本幸夫, モース理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 27, 岩波書店, (1997)
- [2] J.W.Milnor(志賀浩二訳), モース理論, 吉岡書店, (1986)
- [3] J.W.Milnor(佐伯修, 佐久間一浩訳), 複素超曲面の特異点, シュプリンガー・フェアラーク東京
- [4] Aldo.Andreotti and Theodore.Frankel, *The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections*, Annals of Mathematics. **69** (1958), 713-717
- [5] I.M. シンガー/J.A. ソープ, 赤堀也監訳, 松江広文/一楽重雄共訳, トポロジーと幾何学入門, 培風館, (1976)
- [6] 佐武一郎, 線形代数学, 裳華房, (1958)