q パンルヴェ第６方程式のの符号付き超離散化

数学専攻・筒井　栄光

私はパンルヴェ方程式の超離散化について研究をしました。超離散化とは微分方程式を差分化し、得られる式を差分方程式（漸化式）といい、差分方程式を超離散方程式（区分線形方程式）にすることを超離散化という。本研究では差分方程式を超離散化し、超離散方程式を導きだすことに着目し、q 差分パンルヴェ第６方程式から超離散第６方程式を導き、q 差分パンルヴェ第６方程式の特殊解を超離散化し、その解が超離散パンルヴェ方程式を満たすことを示した。

研究内容として、礒島・薩摩 [4] の論文より q 差分パンルヴェ第２方程式で符号付き超離散化を再現し、計算した。そこで、学んだ符号付き超離散化を神保・坂井 [6] の論文より q 差分パンルヴェ第６方程式に用いた。q 差分パンルヴェ第６方程式とは次の式である。

$$\frac{y(t)y(qt)}{a_3a_4} = \frac{(z(qt)-tb_1)(z(qt)-tb_1)}{(z(qt)-b_3)(z(qt)-b_4)} \tag{1}$$

$$\frac{z(t)z(qt)}{b_3b_4} = \frac{(y(t)-ta_1)(y(t)-ta_2)}{(y(t)-a_3)(y(t)-a_4)} \tag{2}$$

$$\frac{b_1b_2}{b_3b_4} = q\frac{a_1a_2}{a_3a_4} \tag{3}$$

次の変数変換を行う。$t=q^m$, $q=e^{Q/\varepsilon}$, $a_j=e^{A_1/\varepsilon}$, $b_j=e^{B_j/\varepsilon}$,
$y(q^m)=(s(\omega_m)-s(-\omega_m))e^{Y(m)/\varepsilon}$, $z(q^m)=(s(\zeta_m)-s(-\zeta_m))e^{Z(m)/\varepsilon}$
また、$s(\zeta)$ は次で定義するものとする。

$$s(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta=+1\\ 0, & \zeta=-1\end{cases}$$

(1),(2) に対して上記の変数変換を行い、全て展開し、負の項は移項して正にする。そして、$s(\zeta_m)$ と $s(\zeta_{m+1})$、$s(\omega_m)$、$s(\omega_{m+1})$ はそれぞれ０か１の値しかとらないので、整理し極限を取ることで超離散方程式をえることができる。
さらに、$S(\zeta_m)$ は $s(\zeta_m)=e^{S(\zeta_m)/\varepsilon}$ となるように変数変換されているので $S(\zeta_m)$ は０か $-\infty$ の値しかとらない。$S(\zeta_m)$ で場合分け（それぞれ８通り）をすることで式を簡単にできる。
(1) を超離散化した結果は
$\max(B_3+B_4+Y(m)+Y(m+1)+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}), B_3+B_4+Y(m)+Y(m+1)+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$

$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$mQ+A_3+A_4+B_1+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1}), mQ+A_3+A_4+B_2+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1}))=\max(2mQ+$
$A_3+A_4+B_1+B_2, mQ+A_3+A_4+B_1+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1}),$
$mQ+A_3+A_4+B_2+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1}),$
$A_3+A_4+2Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1}), A_3+A_4+2Z(m+1)+S(\zeta_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_3+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_4+Y(m)+Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$Y(m)+Y(m+1)+2Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}),$
$B_3+B_4+Y(m)+Y(m+1)+S(-\omega_m)+S(\omega_{m+1}),$
$B_3+B_4+Y(m)+Y(m+1)+S(\omega_m)+S(-\omega_{m+1}))$
(2) を超離散化した結果は
$\max(2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),$
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m),$
$A_3+A_4+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1}),$
$A_3+A_4+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1}),$
$A_1+B_3+B_4+Y(m)+mQ+S(\omega_m),$
$A_2+B_3+B_4+Y(m)+mQ+S(\omega_m))$
$=\max(A_1+A_2+B_3+B_4+2mQ,$
$A_1+B_3+B_4+Y(m)+mQ+S(-\omega_m),$
$A_2+B_3+B_4+Y(m)+mQ++S(-\omega_m),$

$B_3+B_4+2Y(m)+S(-\omega_m)$,
$B_3+B_4+2Y(m)+S(\omega_m)$,
$A_3+A_4+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})$,
$A_3+A_4+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})$,
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)$,
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)$,
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$2Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)$,
$A_3+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)$,
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)$,
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m)$,
$A_4+Y(m)+Z(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m))$
さらに、$S(\zeta_m)$ は $s(\zeta_m)=e^{S(\zeta_m)/\varepsilon}$ となるように変数変換されているので $S(\zeta_m)$ は 0 か $-\infty$ の値しかとらない。$S(\zeta_m)$ で場合分け（それぞれ８通り）をすることで式を簡単にすることができる。
次に、$\frac{b_1}{b_3}=q\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{b_2}{b_4}=\frac{a_2}{a_4}$ を仮定すれば

$$y(qt)=a_3\frac{z(qt)-tb_1}{z(qt)-b_3} \tag{4}$$

$$z(qt)=b_4\frac{y(t)-ta_2}{y(t)-a_4} \tag{5}$$

の解（リッカチ解）は必ず q-$P_{\rm VI}$ の解となる。これらの解も同様に符号付き超離散化をすると、(4) を超離散化した結果は
$\max\{mQ+A_3+B_1,\ B_3+Y(m+1)+S(-\omega_{m+1}),\ A_3+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1}),\ Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_{m+1}),\ Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_{m+1})\}=\max\{A_3+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1}),\ B_3+Y(m+1)+S(\omega_{m+1}),\ Y(m+1)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_{m+1}),\ Y(m+1)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_{m+1})\}$
(5) を超離散化した結果は
$\max\{mQ+A_2+B_4,\ A_4+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1}),\ B_4+Y(m)+S(-\omega_{m+1}),\ Y(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),\ Y(m)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(\omega_m)\}=\max\{A_4+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1}),\ B_4+Y(m)+S(\omega_m),\ Y(m)+Z(m+1)+S(\zeta_{m+1})+S(-\omega_m),\ Y(m)+Z(m+1)+S(-\zeta_{m+1})+S(\omega_m)\}$
$S(\zeta_m)$ で場合分け（それぞれ４通り）をする。ここで次のことが言える。

定理

q-P_{VI} のリッカチ解の符号付き超離散化は、u-P_{VI}(符号付き超離散パンルヴェ方程式) の解となる。

この定理を先ほどの (1) の超離散化８通り、(2) の超離散化８通り、解 (4) の超離散化４通り、解 (5) の超離散化４通りを同じ条件下で満たすのかを確かめて示す。

満たすことを示すのに次の補題を使う。

$e^{X_1}-e^{X_3}=e^{X_4}-e^{X_2},\ e^{Y_1}-e^{Y_3}=e^{Y_4}-e^{Y_2}$

$\Longrightarrow e^{X_1+Y_1}+e^{X_3+Y_3}+e^{X_2+Y_4}+e^{X_4+Y_2}=e^{X_2+Y_2}+e^{X_4+Y_4}+e^{X_2+Y_3}+e^{X_3+Y_1}.$

の超離散化として、

$\max(X_1,X_2)=\max(X_3,X_4),\ \max(Y_1,Y_2)=\max(Y_3,Y_4)$

$\Longrightarrow \max(X_1+Y_1,X_3+Y_3,X_2+Y_4,X_4+Y_2)=\max(X_2+Y_2,X_4+Y_4,X_1+Y_3,X_3+Y_1).$

この補題については場合分けで容易に示すことができる。(4) の超離散化の $S(\zeta_{m+1})=0$ かつ $S(\omega_m)=0$ かつ $S(\omega_{m+1})=0$ の時、解 (4) の超離散化 $S(\zeta_{m+1})=0$ かつ $S(\omega_{m+1})=0$ の時、解 (5) の超離散化 $S(\zeta_{m+1})=0$ かつ $S(\omega_m)=0$ の時で補題を持ちいれば示すことができる。同様にして同じ条件下で確かめれば示すことができる。（計１０通り）ただし、(1),(2),(4),(5) の場合分けで $\max(\ \cdots\ )=-\infty$ という式が出てくるがこの式は意味を持たないので除外して考えることができる。

このように場合分けをして、超離散リッカチ解は超離散パンルヴェ第６方程式を満たすことを示すことができた。

参考文献

[1] 野海正俊、パンルヴェ方程式 - 対称性からの入門 - 、朝倉書店 (2003)

[2] 広田良吾、高橋大輔、差分と超離散、共立出版 (2000)

[3] 岡本和夫、パンルヴェ方程式、岩波書店 (2009)

[4] Isojima S., Satsuma J., A Class of Special Solution for the Ultradiscrete Painleve II Equation, SIGMA, 7 (2011), 074, 9 pp.

[5] Takahashi D.,Tokihiro T.,Grammaticos B.,Ohta Y.,Ramani A.,Constructing solution to the ultradiscrete Painleve equations, J. Phys A: Math. Gen. 30 (1997), 7953-7966

[6] Jimbo M., Sakai H., A q-Analog of the Painleve Equation. Lett Math Phys 38 (1996) 145-154

[7] Sakai H., Casorati determinant for the q-difference sixth Painleve equation,Nonlinearity 11, (1998), 823-833.

[8] Ormerod C. M., Reductions of lattice mKDV to q-$\mathrm{P_{VI}}$, Phys. Lett. A, .376 (2012) 2855-2859