ループ空間のトポロジーに対する Morse 理論の応用
An application of the Morse theory to the topology of loop spaces

数学専攻 三島 英雄
MISHIMA Hideo

概要

本論文では, Morse 理論をコンパクト・リー群に応用することにより, そのループ空間のホモロジー群を求め, さらに精密化し, 例に適用し, Poincaré 多項式を求める.

1. 道の空間における Morse 理論

この節では, 道の空間における諸定義と Morse 理論における重要な定理である Morse 理論の基本定理を紹介する.

定義 1.1(区分的に滑らかな道)
M を C^∞-級多様体, $p,\ q$ を M の 2 点とするとき, p から q への**区分的に滑らかな道**とは, 写像 $\omega : [0,\ 1] \to M$ であり, 次の (1), (2) を満たすものである.
(1)$[0,\ 1]$ の細分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ が存在して, 各 $\omega|[t_{i-1},\ t_i]$ は C^∞-級である.
(2)$\omega(0) = p,\ \omega(1) = q$
このとき, M の中の p から q へのすべての区分的に滑らかな道の集合を $\Omega(M;\ p,\ q)$ と表すことにする.
また, $p = q$ のとき, M の**ループ空間**といい, $\Omega(M)$ と表すことにする.

定義 1.2(測地線)
M を連結なリーマン多様体とするとき, パラメーターづけられた道 $\gamma : [0,\ 1] \to M$ が**測地線**であるとは, γ は全区間 $[0,\ 1]$ 上で, C^∞ でありかつ, γ の加速度ベクトル $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)$ が γ に沿って恒等的に 0 となる.

定義 1.3(共役)
J を測地線 γ に沿うベクトル場, $V = \frac{d\gamma}{dt}$ を速度ベクトル, $p = \gamma(a),\ q = \gamma(b)$ を測地線 γ 上の 2 点で $a \neq b$ とする. J が **Jacobi 場**であるとは, J が Jacobi 微分方程式を満たす:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V,\ J)V = 0$$

p と q は γ に沿って**共役**であるとは, $t = a$ と $t = b$ で 0, 即ち, $J(a) = 0,\ J(b) = 0$ を満たす γ に沿って 0 でない Jacobi 場 J が存在することである.

定義 1.4(指標)
$\omega \in \Omega(M;\ p,\ q),\ E(\omega) = E_0^1(\omega) := \displaystyle\int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$ を 0 から 1 までのエネルギーとするとき, ω の **n-パラメーター変分** $\bar{\alpha}$(または α) とは, $\mathbf{R}^n$ における 0 の近傍 U が存在し, 次の条件を満たす $\bar{\alpha} : U \to \Omega$ である:
(1)$\bar{\alpha}(0) = \omega$
(2)$[0,\ 1]$ の細分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ があり, $\bar{\alpha}(u,\ t) = \bar{\alpha}(u)(t)$ で定義された写像 $\alpha : U \times [0,\ 1] \to M$ は, 各細片 $U \times [t_{i-1},\ t_i],\ i = 1,\ \ldots,\ k$ 上で C^∞-級

また, γ は測地線 $W_1,\ W_2 \in \Omega_\gamma$, α を $\alpha(0,\ 0,\ t) = \gamma_t$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u_1} = W_1(t)$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u_2} = W_2(t)$ を満たす 2-パラメーター変分とするとき, **ヘッシァン** $E_{**}(W_1,\ W_2) := \frac{\partial^2 E(\bar{\alpha}(u_1,\ u_2))}{\partial u_1 u_2}\Big|_{(0,\ 0)}$ と定義する. 測地線 γ の**指標**とは, E のヘッシァン E_{**} が負の定符号となるような $T\Omega_\gamma$ の部分空間の最大次元である.

定理 1.5(Morse 理論の基本定理)
M を完備リーマン多様体, $p,\ q$ をどのような測地線に沿っても共役でないような M の 2 点とする. そのとき, $\Omega(M;\ p,\ q)$ は, p から q への指標 λ の各測地線に対応して, 次元 λ の一つの胞体を含んでいる可算 CW 複体と同じホモトピー型を持つ.

特に, M がコンパクト・リー群の場合には次の定理が成り立つ.

定理 1.6(Bott)
G を 1-連結コンパクトリー群とするとき, $\Omega(G)$ は, 奇数次元の胞体を持たず, かつ λ の各偶数の値に対しては有限個の λ-胞体しか持たないような, CW 複体と同じホモトピー型を持つ. 即ち,
(1)λ が奇数のとき, $H_\lambda(\Omega(G)) = 0$ (2)λ が偶数のとき, $H_\lambda(\Omega(G))$ は有限生成自由アーベル群.
§3 では, $\mathrm{rank} H_\lambda(\Omega(G))$ を調べ, この定理をより精密にする.

2. root 系についての準備

この節では, 3 節の準備として, root と Weyl 領域について紹介する.

定義 2.1(極大トーラス)
G をコンパクト連結リー群とするとき, **n 次元トーラス**とは, $U(1)$ の n 個の直積に同型な位相群である. また, G の**トーラス**とは, あるトーラスと同型な G の部分群であり, T が G の**極大トーラス**とは, T は G のトーラスで, A が T を含むトーラスならば, $T = A$.

定義 2.2(root)
G をコンパクト連結リー群, T を G の極大トーラス, $L(G)$ を G のリー環, $L(T)$ を T のリー環とするとき, T の随伴作用に関して, $L(G)$ は不変部分空間たちの和に直交分解される:

$$L(G) = L(T) \oplus \sum_{r=1}^{m} V_r,\ \ \dim\ V_r = 2$$

ここで, $t \in T$ に対して

$$Ad(t)|_{V_r} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\bar{\theta}_r(t) & -\sin 2\pi\bar{\theta}_r(t) \\ \sin 2\pi\bar{\theta}_r(t) & \cos 2\pi\bar{\theta}_r(t) \end{pmatrix}$$

とおくことにより、準同型写像 $\bar{\theta}_r : T \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ が（符号と順序を除き一意的に）定まる.
そこで、線形写像 $\theta_r : L(T) \to \mathbf{R}$ を $\bar{\theta}_r \circ \exp : L(T) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ のリフトとして定める. 線形写像 $\pm\theta_r : L(T) \to \mathbf{R}$ $(r = 1,\ \ldots,\ m)$ を G の **root** といい, $\{\pm\theta_1,\ \cdots,\ \pm\theta_m\}$ を G の **root 系** という.

定義 2.3(局所図式と Steifel 図式)
$\theta_r : L(T) \to \mathbf{R}$ $(r = 1,\ \ldots,\ m)$: G の root, $n \in \mathbf{Z}$ に対し、$L(T)$ 内の超平面 $L_{r,n} := \theta_r^{-1}(n)$ が定まる.
G の**局所図式**を $D'(G) := \bigcup_{r=1}^{m} L_{r,0}$ と定義する.
G の **Stiefel 図式**を $D(G) := \bigcup_{r=1}^{m} \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} L_{r,n}$ と定義する.
Weyl 領域を $L(T) - D'(G)$ の各連結成分と定義する.
Weyl 胞体を $L(T) - D(G)$ の各連結成分と定義する.

定義 2.4(基本 Weyl 領域と単純 root)

一つの Weyl 領域 $\mathcal{F}$ を一つ固定したものを**基本 Weyl 領域**という。

root $\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_m$ の符号を改めて取り直し，基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ が

$$\mathcal{F} = \{X \in L(T) \mid \theta_r(X) > 0,\, r = 1,\ \ldots,\ m\}$$

となるように、root$\theta_1,\ \ldots,\ \theta_m$ を選ぶことができる．このとき, $\theta_1,\ \cdots,\ \theta_m$ を**正 root**, $-\theta_1,\ \cdots,\ -\theta_m$ を**負 root** という．

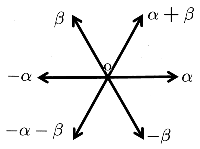
rootα が正 root かつ二つの正 root の和でないとき, α を**単純 root** という．

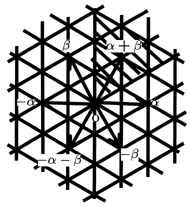
単純 root はちょうど $l =$ 個あり, それらは一次独立である．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ を単純 root とするとき，基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ は $\alpha_1 > 0,\ \cdots,\ \alpha_l > 0$ で与えられる．

例 2.5 $G = SU(3) = A_2$ のとき

単純 root $\alpha,\ \beta$ は $120°$ の角をなし, 長さは等しい. root 系 $\{\pm\alpha,\ \pm\beta,\ \pm(\alpha+\beta)\}$ は下の左図のようになる. Weyl 領域は 6 つあり, 基本 Weyl 領域 $\alpha > 0,\ \beta > 0$ は斜線部分. Weyl 胞体は正三角形である．





3. コンパクト 1-連結リー群上のループ空間のホモロジー群

この節では, コンパクト 1-連結リー群上のループ空間のホモロジー群を求め, 実際に例で調べる．

定理 1.6 の精密化を考える．G をコンパクト 1-連結リー群, $\Omega(G)$ を G のループ空間とするとき, **Poincaré 多項式**を $P(\Omega(G),\ t) := \sum_n \mathrm{rank} H_n(\Omega(G);\ \mathbf{Z}) \cdot t^n$ と定義する．

定理 3.1(Bott)

ループ空間 $\Omega(G)$ のホモロジー群は次のように定められる．j を自然数とするとき

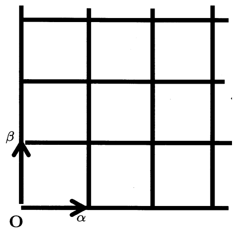
(1)$H_{2j-1}(\Omega(G)) = 0$　　(2)$H_{2j}(\Omega(G))$ は有限生成自由アーベル群.

(3)$P(\Omega(G),\ t) = \sum_\Delta t^{2\nu(\Delta)}$

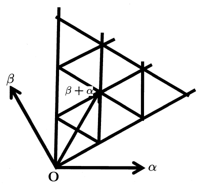
ここで, Δ は基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ に含まれる Weyl 胞体を動き,

$\nu(\Delta) = \sharp\{$ 原点と Δ の (内) 点を結ぶ線分 s と交わる Stiefel 図式 $D(G)$ の超平面 $L_{r,\ n}\}$.

rank$G$=2 の場合で定理 3.1 の (3) を徹底的に調べる．



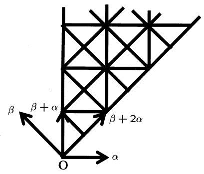
例 1 G=SO(4)=D_2



例 2 G=SU(3)=A_2

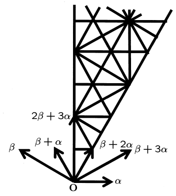
$P(\Omega(G),\ t)$
$= 1 + 2t^2 + 3t^4 + 4t^6 + 5t^8 + 6t^{10} + 7t^{12} + 8t^{14} + \cdots$
$= \sum_{n=1}^{\infty} nt^{2(n-1)}$
$= (\frac{1}{(1-t^2)^2})$

$P(\Omega(G),\ t)$
$= 1 + t^2 + 2t^4 + 2t^6 + 3t^8 + 3t^{10} + 4t^{12} + 4t^{14} + \cdots$
$= (1+t^2)(1 + 2t^4 + 3t^8 + 4t^{12} + 5t^{16} + 6t^{20} + \cdots)$
$= (1+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nt^{4(n-1)}$
$(= \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^4})$



例 3 G=SO(5)=B$_2$

$P(\Omega(G),\ t)$
$= 1 + t^2 + t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 3t^{12} + 3t^{14} + \cdots$
$= (1 + t^2 + t^4)(1 + 2t^6 + 3t^{12} + 4t^{16} + 5t^{20} + \cdots)$
$= (1 + t^2 + t^4) \sum_{n=1}^{\infty} nt^{6(n-1)}$
$(= \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^6})$



例 4 G=G$_2$

$P(\Omega(G),\ t)$
$= 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + 2t^{10} + 2t^{12} + 2t^{14} + 2t^{16}$
$\quad + 2t^{18} + 3t^{20} + 3t^{22} + 3t^{24} + 3t^{26} + 3t^{28} + \cdots$
$= (1+t^2+t^4+t^6+t^8)(1+2t^{10}+3t^{20}+4t^{30}+5t^{40}+\cdots)$
$= (1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8) \sum_{n=1}^{\infty} nt^{10(n-1)}$
$(= \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^{10}})$

注意

実は H.Hopf と J.P.Serre の結果を用いると全く別の方法で等式

$$P(\Omega G,\ t) = \frac{1}{1 - t^{2m_1}} \cdot \frac{1}{1 - t^{2m_2}}$$

を証明することもできる.
(文献 [?], [?] 参照)
但し,
$G = D_2$ のとき $(m_1,\ m_2) = (1,\ 1)$,
$G = A_2$ のとき $(m_1,\ m_2) = (1,\ 2)$,
$G = B_2$ のとき $(m_1,\ m_2) = (1,\ 3)$,
$G = G_2$ のとき $(m_1,\ m_2) = (1,\ 5)$.

今後の課題

G の階数が 3 以上の場合に, $\nu(\Delta)$ の振る舞いを調べる.

参考文献

[1] J. Milnor 著, 志賀浩二　訳, モース理論, 吉岡書店　数学叢書, (1968).

[2] 戸田宏・三村護 共著, リー群の位相 下, 紀伊國屋書店, (1979).

[3] R. Bott, On torsion in Lie groups, Proc. Nat. 40 (1954), 586-588

[4] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 251-281

[5] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. Math., 70 (1959), 313-337

[6] R. Bott and H. Samelson, Application of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math., 80 (1958), 964-1029