群上の左順序のなす空間
The space of left orderings on groups

数学専攻　湯淺　祥平
YUASA, Shouhei

Introduction

群上の left ordering については, 代数的には主に Conrad によって研究されてきたが, 2000 年前後から群の実数直線への作用との関係が注目され, 盛んに研究が進められている分野である. 最近では特に left ordering の空間自体について興味が持たれている. ここでは, left ordering とその集合についての定義と基本的な性質について述べた後, left ordering の例として $\mathbb{Z}^2$ と クラインの壺の基本群の場合を示し, 最後に自由群に入る left ordering の集合に孤立点を含まないことを示す.

1　定義と基本的な性質

ここでは, 高々可算な群のみを扱うことにする.

定義 1.1.　群 G 上の全順序 $\preceq$ が G の **left ordering** であるとは, すべての $g,\ a,\ b \in G$ に対して, $a \prec b \Rightarrow ga \prec gb$ が成り立つときをいう. また, 群 G の left ordering 全体の集合を $LO(G)$ とする.

left ordering を持つ群のことを, **left-orderable** な群ということにする.

命題 1.2.　群 G について left-orderable ならば, torsion free である.

また, この命題により, left-orderable な群は $\{e\}$ もしくは無限群である.

命題 1.3.　G が高々可算な群であるとき, G が left-orderable であることと, G が実数直線 $\mathbb{R}$ に向きを保つ同相写像として忠実に作用することは同値である.

証明. まず, G が $\mathbb{R}$ に向きを保って忠実に作用しているとして, G が left-orderable であることを示す. そこで, 有理数 $\mathbb{Q}$ の番号付け $\{q_i\}_{i\geq 0}$ をひとつとり, G 上の順序 $\preceq'$ を $\mathbb{R}$ 上で $g(q_i) > q_i$ となっているとき, $g \succ' e$ とする. ここで, $i = \min\{j \mid g(q_j) \neq q_j\}$ とする. この作用の基準点は複数あるが, $\preceq'$ は total left-ordering となっている.

次に, G が left-orderable のとき, G の left ordering $\preceq$ に対して, 基準点が 1 つで順序が決まる G の $\mathbb{R}$ への忠実な作用 $D_{\preceq} : G \to \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ を構成する. この作用を順序 $\preceq$ に対する **dynamical realization** という. G の元のある番号付け $\{g_i\}_{i\geq 0}$ に対して, G の $\mathbb{R}$ への埋め込み $t : G \to \mathbb{R}$ を以下のように帰納的に定義する. まず, $t(g_0) = 0$ とする. 次に, $i \geq 1$ に対して

$$t(g_i) := \begin{cases} \max\{t(g_0), \ldots, t(g_{i-1})\} + 1, & (g_i \succ \max\{g_0, \ldots, g_{i-1}\}) \\ \min\{t(g_0), \ldots, t(g_{i-1})\} - 1, & (g_i \prec \min\{g_0, \ldots, g_{i-1}\}) \\ \dfrac{(t(g_m) + t(g_M))}{2}. & (g_m \prec g_i \prec g_M, (g_m, g_M) \cap \{g_1, \ldots, g_{i-1}\} = \emptyset) \end{cases}$$

とする. ここで, $(g_m, g_M) = \{g \in G \mid g_m \prec g \prec g_M\}$ である. このとき, $\{t(g_i)\} \subset \mathbb{R}$ 上の G の作用を $g \cdot t(g_i) := t(gg_i)$ によって定義すると, この作用を $\mathbb{R}$ 上の同相写像として拡張することにより, 順序から原点が基準点の忠

実な作用 $D_{\prec}$ を得ることができる. この構成は番号付けと拡張の仕方によるが, 位相共役類はこれらの選び方に依らない. $\square$

今後, 簡単のために $g_0 = e$ とする G の番号付けによる dynamical realization を用いることにする.

定義 1.4. G の left ordering $\preceq$ について, その **positive cone** $P(\preceq)$ を順序 $\preceq$ について単位元 e より真に大きくなる G の元全体として $P(\preceq) := \{g \in G \mid g \succ e\}$ と定義する.

順序 $\preceq$ は left ordering であることから, $P(\preceq)$ は半群であり, また, $P(\preceq)^{-1} = \{g^{-1} \in G \mid g \in P(\preceq)\}$ と定義すると, $G = P(\preceq) \sqcup \{e\} \sqcup P(\preceq)^{-1}$ が成り立つ.

逆に, 上の性質 1, 2 を満たすような G の部分集合 P について, G 上の順序 $\preceq_P$ を G の元 g, g' に対して $g^{-1}g'$ が P の元になっているとき $g \prec_P g'$ と定義すれば, P が positive cone となるような G の left ordering を定めることができる. これより, $LO(G)$ は G のベキ集合 2^G の部分集合として捉えることができ, $LO(G)$ の位相も, 2^G の部分位相として定義できる. 実際に $LO(G)$ の位相を扱うときは, G の各元 g に対して $U_g = \{\preceq \in LO(G) \mid e \prec g\}$ と定義すれば, $LO(G)$ の位相は $\{U_g\}_{g \in G}$ を open subbasis として定義される位相と一致する.

この位相により, $LO(G)$ には次のような性質があることが分かる.

定理 1.5. $LO(G)$ は全不連結かつコンパクトな空間である.

2 $\mathbb{Z}^2$ 上の left ordering

$\mathbb{Z}^2$ 上の基底を e_1, e_2 とおく. ここで, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ のすべての元 x に対して, 準同型写像 $\phi_x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ を以下の様に定義する.

$$\phi_x(e_1) = 1,\ \phi_x(e_2) = x,\ \phi_\infty(e_1) = 0,\ \phi_\infty(e_2) = 1.$$

x が無理数のとき, ϕ_x は単射であり, $P_x = \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid \phi_x(g) > 0\}$ は $\mathbb{Z}^2$ の positive cone を表す. この positive cone から定義される left ordering を **irrational type** という. この irrational type の集合は $LO(\mathbb{Z}^2)$ の中で稠密である. (図 2.1.)

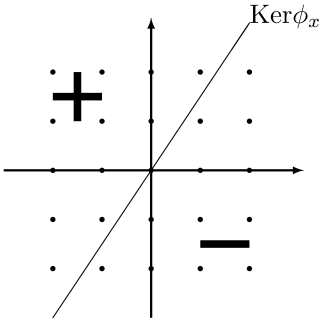

図 2.1.

x が有理数か $x = \{\pm\infty\}$ のとき, ϕ_x は単射ではなく, $\mathrm{Ker}\phi_x \cong \mathbb{Z}$ となる. 従って, $P_x = \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid \phi_x(g) > 0\}$ から定義される left ordering は全順序にならない. しかし, x に右から収束する無理数列 $\{x_n\}$ と 左から収束する無理数列を $\{x'_n\}$ をとってきて, $P_x^+ = \lim_{n\to\infty} P_{x_n}$, $P_x^- = \lim_{n\to\infty} P_{x'_n}$ とおけば, P_x^+ と P_x^- から定義される left ordering は全順序である. これらの positive cone から定義される left ordering を **rational type** という. (図 2.2.)

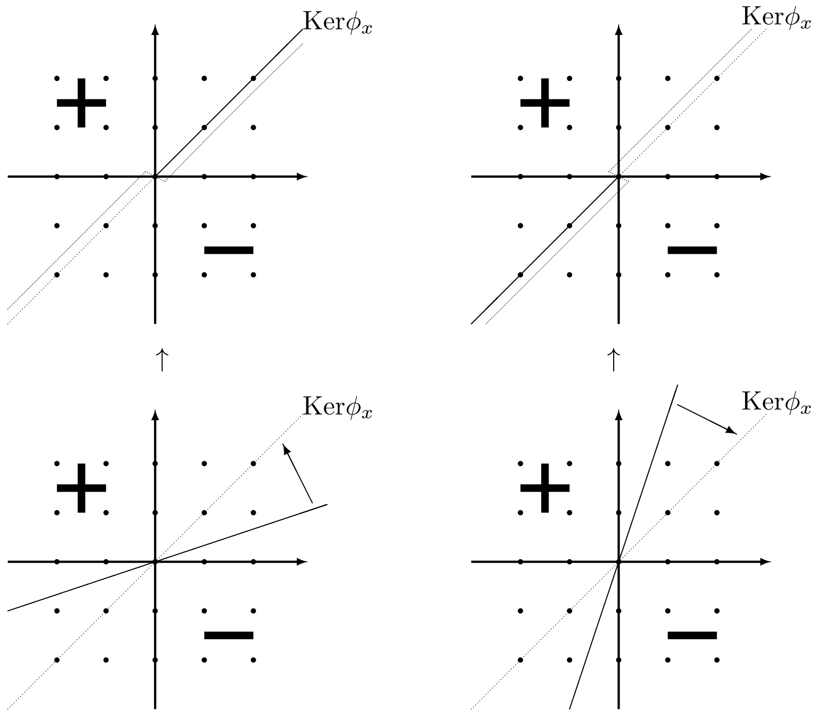

図 2.2.

これより, $\mathbb{Z}^2$ の left ordering として一般的に知られている辞書式順序は $-\infty$ に収束する無理数列から作られる positive cone から定義される left ordering の逆順序であることがわかる. また, rational type は irrational type の極限として考えているから, $LO(\mathbb{Z}^2)$ は S^1 上の有理数の点に開区間を挟み込んだ集合のように見ることができる. 従って, $LO(\mathbb{Z}^2)$ はカントール集合と同相である.

3 クラインの壺の基本群の left ordering

クラインの壺の基本群とは $\langle x, y \mid yxy = x \rangle$ で表される群であり, ケーリーグラフを考えると positive cone の生成元は $\{x, z\}$ の他に, $\{x, y^{-1}\}$, $\{x^{-1}, y\}$, $\{x^{-1}, y^{-1}\}$ しかないことが代数的な計算よりわかる. これより, クラインの壺の基本群上の left ordering はちょうど 4 つしかなく, すべて孤立していることがわかる.

4 自由群上の left ordering

命題 4.1. 任意の $n \geq 2$ に対して, $[F_n, F_n] \cong F_\infty$

これにより, 自由群の導来列 $F_n \ \triangleright \ [F_n, F_n] \ \triangleright \ [[F_n, F_n], [F_n, F_n]] \ \triangleright \ \cdots$ が作れる. ここで, それぞれ $G_0 = F_n,\ G_1 = [F_n, F_n],\ G_2 = [[F_n, F_n], [F_n, F_n]],\ \ldots$ とおく. このとき, $i = \{1, 2, \ldots\}$ に対して, G_i の共通部分は単位元となるから, このことと, G_i/G_{i+1} がアーベル群で orderable ということを用いて, 以下のようにして, 自由群の left ordering $\preceq_F$ を考える. 自由群 F_n の単位元でない任意の元 w に対して

$$w \succ_F e \Leftrightarrow G_0/G_1\text{上で} \begin{cases} w \succ e, \\ w = e \text{ かつ } G_1/G_2\text{上で} \begin{cases} w \succ e, \\ w = e \text{ かつ } G_2/G_3\text{上で} \cdots \end{cases} \end{cases}$$

と定義する.

次に, $LO(F_n)$ 上の軌道について考える.

定理 4.2. (Clay) *$n \geq 2$ に対して, $LO(F_n)$ は F_n の自然な共役による作用の下で稠密な軌道を持つ.*

この定理と次の命題により $LO(F_n)$ が孤立点を含まないことがわかる.

命題 4.3. *G を left-orderable な群とする. $LO(G)$ が G の共役による作用の下で稠密な軌道を持つとき, $LO(G)$ は孤立点を持たない.*

定理 4.2. について, $n = 2$ のときを考える.

この定理を示すために必要なものを, いくつか定義する. F_2 の元 w に対して, その word の長さを $|w|$ で表したとき, F_2 の半径 n の閉球を $B_n = \{w \in F_2 = \langle a, b \rangle \mid |w| \leq n\}$ とする. また, 閉球 B_n と F_2 の left ordering $\preceq$ が与えられたとき $g^+_{(B_n, \preceq)} = \max_{\preceq}\{w \in B_n\}$, $g^-_{(B_n, \preceq)} = \min_{\preceq}\{w \in B_n\}$ とおく. このとき, 基準点が $x_0 \in \mathbb{R}$ となる $\preceq$ による dynamical realization を $D' : F_2 \to \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ とすれば, これらを用いて, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $[D'(g^-_{(B_n,\preceq)})(x_0), D'(g^+_{(B_n,\preceq)})(x_0)]^2 : (B_n, \preceq)$-box を定義できる. さらに, left-ordering の集合は第 2 可算公理を満たす位相空間であるから, $LO(F_2)$ の可算稠密部分集合として $\mathcal{L} = \{\preceq_1, \preceq_2, \dots\} = \{\preceq_m\}_{m=1}^{\infty}$ がとれる. これより, $LO(F_2)$ の可算稠密部分集合 $\mathcal{L} = \{\preceq_m\}_{m=1}^{\infty}$ と閉球の集合 $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\eta(k) = (B_{n_k}, \preceq_{m_k})$ となる全射を $\eta : \mathbb{Z} \to \mathcal{B} \times \mathcal{L}$ をおく.

ここで, 増加関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と基準点が x_0 のある dynamical realization D' に対して, D' の φ による共役 $\varphi D'(g) \varphi^{-1}$ は, また dynamical realization となり, 基準点は $\varphi(x_0)$ となる. よって, $\eta(k)$ による dynamical realization D' は適当に共役をとることにより, 基準点が k で $\eta(k)\text{-box} = [k - 1/3, k + 1/3]^2$ となるような dynamical realization $D_{\eta(k)}$ に作り直すことができる. この $\eta(k)$-box を各整数 k に対して $y = x$ 上にすべて並べる.

定理 4.2. は次の命題のより示すことができる.

命題 4.4. *F_2 の生成元を $\{a, b\}$ とおく. このとき, それぞれの整数 k に対して $[k - 1/3, k + 1/3]^2$ の中で $D(a) = D_{\eta(k)}(a), D(b) = D_{\eta(k)}(b)$ となる $D : F_2 \to \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ が存在する. この作用により, すべての整数は同じ軌道に属している.*

参考文献

[1] P.Conrad, *Right-ordered groups*, Mich. Math. Journal **6**, (1959), 267-275

[2] T.Ito, *Topology of invariant group orderings*, 第 58 回トポロジーシンポジウム講演集

[3] A.Sikora, *Topology on the spaces of orderings of groups*, Bull. London Math. Soc. **36**, (2004), 519-526.

[4] T.Ito, *Space of group orderings, quasi morphisms and bounded cohomology*, arXiv:1006.5491

[5] 森田茂之, 特性類と幾何学, 岩波書店, (1998)

[6] C.Rivas, *Orderable groups*, Ph.D. thesis, Univ. de Chile (2010)

[7] P.Dehornoy, I.Dynnikov, D.Rolfsen and B.Wiest, *Ordering Braids*, Mathematical Surveys and Monographs **148**, Amer. Math. Sor. 2008

[8] C.Rivas, *Left-orderings on free products of groups*, J. Algebra **350** (2012), 318-329.