

# Schwinger 機構によるホーキング輻射の解明

## Solution to Hawking radiation by Schwinger mechanism

物理学専攻 太田 慎治

Department of physics Shinji Ota

・本論文は、ホーキング輻射についてシュウィンガー機構を用いての考察を行う。一般相対論における解はブラックホールの存在を示す。そのブラックホールにおいて、ブラックホールの“蒸発”という、不思議な現象が存在する。これは、「ホーキング輻射」とよばれる現象によって説明される。ホーキング輻射はブラックホール事象地平線付近での粒子の対生成が起き、片方がブラックホールへ落ち込み、もう一方が反対へ放出されることで観測される。しかしブラックホールへ落ち込む粒子の情報の喪失など、この現象は説明が困難なものであり、未だ完全な解決がされていない。そこで粒子対生成の機構に注目し、それと相似性のある量子電磁気学の「シュウィンガー機構」をモデルに計算・比較を進めていくことで、ホーキング輻射についての計算を考察していく事とする。二つのモデルは量子力学的な零エネルギーの真空場において、背景時空により粒子・反粒子対が生成される事で観測される。この背景時空について、ホーキング輻射では事象地平面における表面重力により生成された粒子対が分かれる事となり、一方でシュウィンガー機構では電場がある真空場で電子の仮想粒子対が生成されたとき、電場により電子対が分かれる事となる。他、これらのモデルには相似点があるが今回は、この点を扱っていく。計算の比較に用いるのは QED・spinor の effective action であり、これをシュバルツシルト幾何学のブラックホールでの事象地平面付近での massless boson と対比している。

(ホーキング輻射) - ブラックホールの地平面近くでの真空場揺らぎと粒子対の生成を考える。地平面の一部を含む、小さな時空領域にて、真空揺らぎにより、粒子・反粒子が地平面の外部・内部に生成される。粒子・反粒子は、4元運動量  $p_\mu$  と  $\bar{p}_\mu$  で地平の両側で作られ、位置についてキリング・ベクトル  $\xi$  で示される。このブラックホールを扱う、シュバルツシルト幾何学での保存量は、生成された粒子の全4元運動量  $p$  とキリング・ベクトルの内積の値  $-\xi \cdot p$  であり、真空から生じるどんな揺らぎも保存則により、以下が成立する

$$\xi \cdot p + \xi \cdot \bar{p} = 0 \quad (1)$$

シュバルツシルト座標で、 $\xi$  の成分は、(1,0,0,0) であり、

$$\xi \cdot \xi = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2)$$

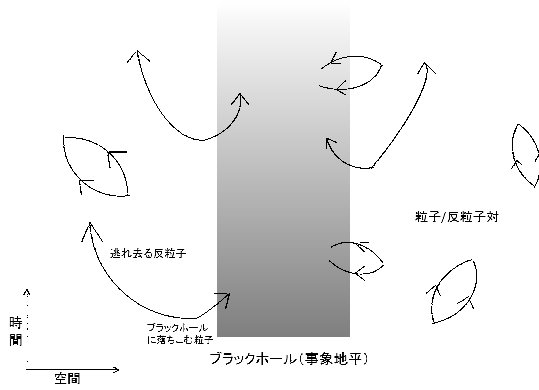


図 1: 事象地平面付近での対生成

地平の外部  $[r > 2M]$  で、 $\xi$  は時間的で、内部  $[r < 2M]$  で空間的である。この差がホーキング輻射の起源となる。地平の外部で、 $-\xi \cdot p$  は正でなければならない。これは、4元速度が時間的方向を向く観測者によって測定されるエネルギーに比例するためである。もし反粒子も地平の外部にあると、 $-\xi \cdot \bar{p}$  に対して同じ要請がなされ、保存則が満たされなくなる。しかし、内部の反粒子に対しては  $\xi$  にその要請がない。内部では  $-\xi \cdot \bar{p}$  はどの観測者からも、エネルギーとして観測されない。実際に、 $-\xi \cdot \bar{p}$  は  $\xi$  の方向の空間基底ベクトルを持つ観測者の空間運動量の成分になり、かつ運動量は正ではない。従って、粒子が地平の反対側で生成される場合、真空からの対生成過程はシュワルツシルト幾何学の保存則から許される。この過程は、対生成の存在する時間感覚が短いから、地平近くがもっとも適している。

以上の原理を踏まえて曲率空間からの粒子生成については、「Bogoliubov 変換」を通じて定式化していく、

$$a_{J,out} = \alpha_J a_{J,in} + \beta_J b_{J,in}^\dagger \quad (3)$$

vacuum polarization を考えていく。ホーキング放射は、Hawking temperature  $[T_H = \frac{\kappa}{2\pi}]$  で、量子数  $J$  で BE・FD 分布を持ち、回転する電荷ブラックホール (レイズナー・ノルドシュトゥル・ブラックホール) は、

$$N_J(\omega) = \frac{1 - |R_J|^2}{e^{\beta(\omega - m\Omega_H - q\Phi_H)}} \quad (4)$$

上式よりシュワルツシルト・ブラックホールでの "vacuum persistence" は、

$$2ImW = -(-1)^{2\sigma} \sum_J \ln 1 - (-1)^{2\sigma} e^{\beta(\omega - m\Omega_H - q\Phi_H)} \quad (5)$$

4次元、質量  $M$  である Schwarzschild black hole では、温度の逆数として  $[\beta = \frac{1}{k_B T}]$  を持つ。他に、[球面調和関数:  $l, m$ 、極:  $p$ 、エネルギー:  $\omega$ ] を用意すると、massless なボソン場での Bogoliubov 係数は以下のように与えられる、

$$\alpha_J = A_J e^{2M\omega\pi} \Gamma(1 + i4M\omega), \beta_J = -A_J e^{2M\omega\pi} \Gamma(1 + i4M\omega) \quad (6)$$

この時、effective action は

$$W = i(8M\pi) \sum_l (2l+1)(2p+1) \int \frac{d\omega}{2\pi} \ln \Gamma(1 - 4iM\omega) \quad (7)$$

発散項を考慮して「 $\epsilon$  - regularization」を導入すると、単位 (地平) 面積当たりの effective action は、

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{16\pi M} \sum_l (2l+1)(2p+1) \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\beta\omega s} \left[ \frac{\cos s/2}{\sin s/2} - \frac{2}{s} \right] \quad (8)$$

。

(シュウィンガー機構) - 以下、量子電磁気での非線形現象である真空偏極について展開していく。QED では、この「真空偏極」は光子が電子・陽電子対を生成する現象である。背景時空に電場で満たされる場合、真空中で電子・陽電子対は偏極する。(真空中で、「電気双極子の雲」を作る。) この反応で元々真空中にあった電荷が、(電気双極子がまとわりついた分だけ) 変化して観測される。これが、「真空偏極」と呼ばれる現象である。

古典電磁場に対して、場の量子論的なアプローチによる(光子などに関する)物理現象を記述する場合を考える。これにはハイゼンベルグ - オイラー・ラグランジアンが有効であり、十分小さいエネルギー領域の QED 現象を近似的に再現する。

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-m_e^2 s) \left[ (es)^2 \frac{\text{Re} \cosh(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\text{Im} \cosh(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} - 1 \right] \quad (9)$$

上の式は、電磁場が十分に弱い時の極限で以下のように書ける、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} [(E^2 - B^2)^2 + 7(EB)^2]$$

QED のラグランジアンと比較してみると、

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{fer} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

上式は古典マクスウェル理論についてのラグランジアン (- F) に対して、最も主要な量子的補正を追加している。1936 年に (Heisenberg, Euler) によって理論を一般化。この L は、マクスウェルのラグランジアンに対する完全な非線形補正を加えたものとなる。

「対生成」での確率についてさらに研究したのが「Julian Schwinger」であり、弱い電場での主要対生成 (確率) 幅を定式化したのが、「シュウィンガー - 機構」である。光子による電子対生成について、ゲージ不変な量を用いての (結果において、「相対論不変」・「ゲージ不変」を前提としている) 特定 (弱い) の電磁場での真空偏極の問題の解決を図る。

定式化した対生成幅 に関しては、対生成に関する effective action W から実粒子の確率を求め、

$$|e^{iW}|^2 = e^{-2\text{Im}W} \quad (10)$$

単位時間・体積あたりの確率は、

$$\Gamma = -2\text{Im}\mathcal{L}_{eff} \quad (11)$$

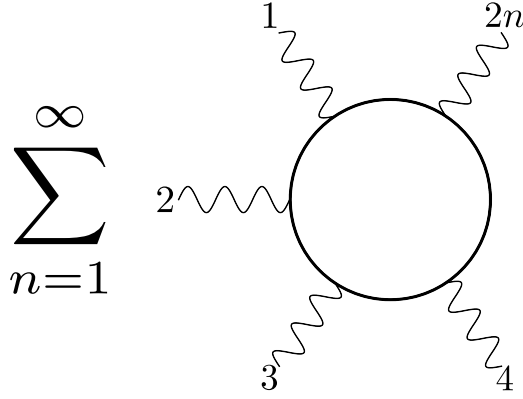


図 2: 1-loop diagrams

(まとめ) - Schwartzchild blackhole でのホーキング放射と QED の Schwinger 機構について、in-out 形式で effective action ,effective Lagrangian、 vacuum persistence を求めた。比較すると、

$$L_{eff} = (-1)^{2\sigma} \frac{(1+2\sigma)qE}{2} \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{m^2+k^2}{2qE}s\right) \left[ \frac{\cos^2\sigma(s/2)}{\sin(s/2)} - \frac{2}{s} + (-1)^{2\sigma} \frac{1-\sigma}{6}s \right]$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{16\pi M} \sum_l (2l+1)(2p+1) \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-\beta\omega s} \left[ \frac{\cos s/2}{\sin s/2} - \frac{2}{s} \right]$$

この両式は effective action であるため、物理的な特性を表している。1 つ目は両式右辺の積分前半になる。一見すると関係性がないようだが、実はその二つはそれぞれの系（現象）についての状態数の足し合わせになっている。形が異なるのは、[ホーキング放射：シュワルツシルト幾何学]、[シュウィンガー機構：電磁場] という点のためである。また残りの積分後半は、「固有時間積分法」という方法での積分になっている。それに従うと、積分する関数はほぼ同型となっており、変数  $s$  以外の部分を定数と見なせば計算結果においても相似的なものが得られる見込みがある。同様に、比較すると

$$2Im\mathcal{L}_{eff} = (-1)^{2\sigma} \frac{(1+2\sigma)(qE)}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \ln(1 + (-1)^{2\sigma} \mathcal{N}_k)$$

$$2ImW = -(-1)^{2\sigma} \sum_J \ln(1 - (-1)^{2\sigma} e^{-\beta(\omega - m\Omega_H - q\Phi_H)})$$

この vacuum persistence amplitude は fermion、 boson のため符号が逆となっているが、背景場により真空ゆらぎから粒子対生成を行う機構が類似しているため、構造も似ている。また粒子対の（平均）生成数もその構造に相似性が見られ、その点から比較していくことでホーキング放射の計算を進める一助になる可能性が考えられる。