

安定化有限要素法による都市の温熱環境解析手法の構築

*Development of the Numerical Method for Thermal Environment
in Urban Area by Stabilized Finite Element Method*

土木工学専攻 4 号 池田 哲也
Tetsuya IKEDA

1. 研究目的

近年，経済社会活動や人口の都市域への過度の集中により，都市部においてヒートアイランド現象が年々顕在化し社会問題となっている．これらの対策として進められている屋上緑化などの屋外温熱環境緩和手法の効果を定量的に評価することは極めて重要である．都市の温熱環境の形成には風，熱，植生，日射や構造物など様々な要素が関連している．総合的に解析するためには，それらの要素をより多く考慮し連成させる必要があり，構造物や地形などを詳細に表現すること，日射や地表面性状の違いの考慮など，実際の物や物理現象を数値解析に組み込み，連成させることが望ましい．

筆者ら¹⁾はこれまで，乱流モデルに RANS に基づく $k-\varepsilon$ 型 2 方程式モデルを用いた有限要素法に基づく温熱環境解析手法の構築を行ってきた．本研究では，それをさらに発展させるべく，非定常現象をより正確に把握するために LES 手法に基づく都市の温熱環境解析手法の構築を行った．空間方向の離散化には安定化有限要素法²⁾を，時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用いた．本手法の妥当性について検討をするため，地表面高温領域周辺気流解析及び高層建物周辺気流解析を行い，実験値³⁾並びに解析値⁴⁾⁵⁾との比較を行った．

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式

流体は非圧縮性粘性流体を考え，Boussinesq 近似を仮定する．そのときフィルタリングおよび無次元化を施した，Grid Scale (GS) の運動方程式，連続式，エネルギー方程式，絶対湿度の輸送方程式はそれぞれ式 (1)，(2)，(3)，(4) で表される．

運動方程式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g\beta (\bar{\theta} - \theta_0) \delta_{i3} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

絶対湿度の輸送方程式；

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5)$$

$$h_j = \bar{u}_j \bar{\theta} - \bar{u}_j \bar{\theta} \quad (6)$$

$$f_j = \bar{u}_j \bar{q} - \bar{u}_j \bar{q} \quad (7)$$

ここで， \bar{u}_i ， \bar{p} ， $\bar{\theta}$ ， \bar{q} はそれぞれフィルタリングを施した流速，圧力，温度，絶対湿度である．また， τ_{ij} ， h_j は SubGrid Scale (SGS) 応力， h_j は SGS 熱流束 f_j は SGS 湿度流束を表す．格子で捉えきれない SGS の乱れによる GS の流れ場への影響は， τ_{ij} を通じて GS の運動方程式に組み込まれる． τ_{ij} ， h_j ， f_j に対してモデル化を行う．

2.2 Smagorinsky モデル

Smagorinsky モデルは，SGS 応力 τ_{ij} に対するモデル化の中で最も代表的なものである．乱流エネルギーの収支において生産項と散逸項が釣り合うという局所平衡状態を仮定すると，SGS 応力は以下のようにモデル化される．

$$\tau_{ij} = -2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} \quad (8)$$

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (9)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

$$\Delta = V_e^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

$$h_j = -\alpha_{\theta SGS} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{\nu_{SGS}}{Pr_{SGS}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \quad (12)$$

$$f_j = -\alpha_{q SGS} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} = -\frac{\nu_{SGS}}{Sc_{SGS}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \quad (13)$$

ν_{SGS} は渦粘性係数， \bar{S}_{ij} は GS の変形速度テンソル， C_s は Smagorinsky 定数， Δ はフィルター幅であり 4 面体要素の体積 V_e の 3 乗根で定義する．また， $\alpha_{\theta SGS}$ は SGS 温度拡散係数， $\alpha_{q SGS}$ は SGS 湿度拡散係数， Pr_{SGS} は SGS プラントル数， Sc_{SGS} は SGS シュミット数である．

2.3 離散化手法

基礎方程式，式 (1)，(2) に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を，式 (3)，(4) に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いて空間方向の離散化を行う．時間方向の離散化には，Crank-Nicolson 法により離散化を行い，連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた．

3. 地表面の熱収支

太陽から地表面に与えられた熱エネルギーは顕熱や潜熱に変換されるが，地表面の種類や状態によってその配分比が変わる．熱収支式において，日射量や温度を入力条件として地表面におけるつり合い式を解き，地表面温度を求めるものである．その概念図を図 - 1 に，熱収支式を式 (14) に示す．

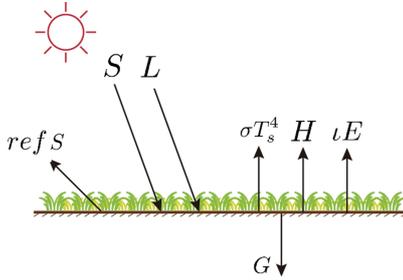


図 - 1 モデル概念図

$$(1 - ref) S_i + R_i = \sigma T_s^4 + H + \epsilon E + C_i \quad (14)$$

ここで， S_i は短波放射量， R_i は長波放射量， H は顕熱輸送量， ϵE は潜熱輸送量， C_i は貯熱量， ref はアルベド， σ はステファン・ボルツマン定数 ($= 5.67 \times 10^{-8} [W/m^2 K^4]$)， T_s は地表面温度である．また，短波放射量，長波放射量に含まれる建物や地表面からの反射を考慮するために，後述するモンテカルロ法から算出した形態係数を組み込んだ．

3.1 モンテカルロ法による形態係数の算出

形態係数の算出方法には大きく分けて，解析的に算出する方法と，空間的にランダムに放射される放射束を追跡しもとめる統計的方法の 2 つがあるがここでは統計的方法の 1 つであるモンテカルロ法について説明する．

放射束を射出する面を i 面とし，遮蔽物となる面を j 面として形態係数を求める場合，まず均等拡散面を仮定した i 面から均等拡散条件を条件を満たすように放射束を射出し，その行く先を追跡する．その結果 i 面からどの面に何本の放射束が入射したかが明らかになる．放射束はすべて同じエネルギーを持っていると仮定しているので， i 面から射出された全放射束 N_t の内， j 面に到達した本数 N_{ij} がわかれば， i, j 面間の形態係数は式 (15) より求めることができる．

$$F_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_t} \quad (15)$$

3.2 Gebhart の吸収係数

任意の放射束射出面 i から j 面への放射による熱輸送の経路には， i 面から j 面へ直接到達するものと， i 面から射出され， i 面， j 面以外の面 k に反射した後に j 面に入射する経路がある．形態係数はこれらの 2 つの経路による熱輸送のうち，直達成分のみを解析するのに対して，Gebhart の吸収係数は 2 つの熱輸送経路の両者を解析するものである．以下に Gebhart の吸収係数の算出のための式 (16) を示す．

$$B_{ij} = \epsilon_j F_{ij} + \sum_{k=1}^n B_{kj} (1 - \epsilon_k) F_{ik} \quad (16)$$

式 (16) は B_{ij} を未知数とする n^2 元連立 1 次方程式であり，形態係数 F_{ij} ，放射率 ϵ_i が既知であれば Gebhart の吸収係数 B_{ij} を求めることができる．なお， n は固体表面の総分割数である．

3.3 短波放射

短波放射量とは太陽からの日射のことであり式 (17) のように直達日射量 E_{Di} と天空日射量 E_{Si} に分けられ，式 (18)，(19) となる．

$$S_i = E_{Di} + E_{Si} \quad (17)$$

$$E_{Di} = I_N \cos \theta^* = I_{Ne} \cdot n \quad (18)$$

$$E_{Si} = F_{is} I_{SH} \quad (19)$$

ここで， I_N は法線面直達日射量 [W/m^2]， F_{is} は天空を望む形態係数， I_{SH} は水平面天空日射量 [W/m^2]， e は太陽方向の単位ベクトル， n は壁面及び地表面の外向き法線ベクトルである．更に，各面に反射された後，地表面や壁面に吸収される日射 (短波) エネルギー S_{Aij} は Gebhart の吸収係数 B_{ij} を用いて以下の式により計算される．

$$S_{Aij} = B_{ij} S_{Ri} \quad (20)$$

最終的に得られる日射 (短波) による全エネルギー $S_i [W]$ は以下の式により求めることができる．

$$S_i = S_{Di} + \sum_{j=1}^n S_{Aji} \quad (21)$$

3.4 長波放射

長波放射量とは物体や空気から放射される熱エネルギーのことであり，以下に示す式により求めた．

$$R_i = B_{is} \sigma T_{sky}^4 + \sum_{j=1}^n \sigma B_{ji} \epsilon_j T_j^4 \quad (22)$$

なお， ϵ_i は長波放射吸収率であり建物及び地表面で 0.8，天空で 1.0 を与えた．

3.5 顕熱輸送量

顕熱輸送量とは地表面から大気に輸送される熱量のことであり、以下のバルク式で与えられる。

$$H = c_p \rho C_H U (T_s - T) \quad (23)$$

ここで、 $c_p \rho$ は空気の体積熱容量 (1 気圧, 20 で $1.21 \times 10^3 \text{ J/K} \cdot \text{m}^3$), C_H はバルク係数, U, T は代表的な高度における風速, 温度である。

3.6 潜熱輸送量

潜熱とは物質が相変化を行う際に使われるエネルギーのことで、ここでは水が水蒸気に変化する際の気化熱をさし、以下のバルク式で与えられる。

$$LE = L \rho \beta C_H U (q_s - q) \quad (24)$$

ここで、 μ は水の気化の潜熱 (= 0 で $2.5 \times 10^6 \text{ [J/kg]}$), β は地表面の蒸発効率, q_s は地表面温度 T_s に対する飽和比湿 $[\text{kg/kg}]$, q は大気比湿である。

3.7 貯熱量

深さ z における貯熱量 C_i は地面において、

$$C_i = \lambda \frac{dT_G}{dz} = \lambda \frac{T_s - T_0}{dz} \quad (25)$$

で表され、 λ は熱伝導率, T_0 は地中温度である。

これらから求められた各項を式 (14) に与えニュートン法により T_s を求める。

4. 数値解析例

4.1 地表面高温領域周辺気流解析

非等温場における本手法の精度検証を行うため、地表面高温領域周辺気流解析を行い、既存の実験結果³⁾、解析値⁴⁾、RANS に基づく計算結果との比較を行った。図 - 2 に解析領域を示す。本解析に用いたメッシュは、 x, y, z 方向に $64 \times 30 \times 42$ 分割、最小メッシュ幅は $4.43 \times 10^{-2} L$ の不等分割メッシュを用いた。また、Reynolds 数は 2.9×10^4 , Archimedes 数は 1.21, SGS-Prantdl 数は 0.5, 微小時間増分量は 1.0×10^{-3} とした。流入境界には $u = z^{\frac{1}{4}}$, 流出境界には Traction-free 条件を適用した。上端面と側面に slip 条件, 底面と壁面には linear-1/7 power law 型 2 層モデルを用いた。

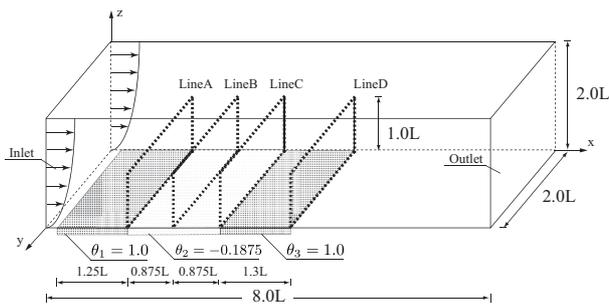


図 - 2 解析領域

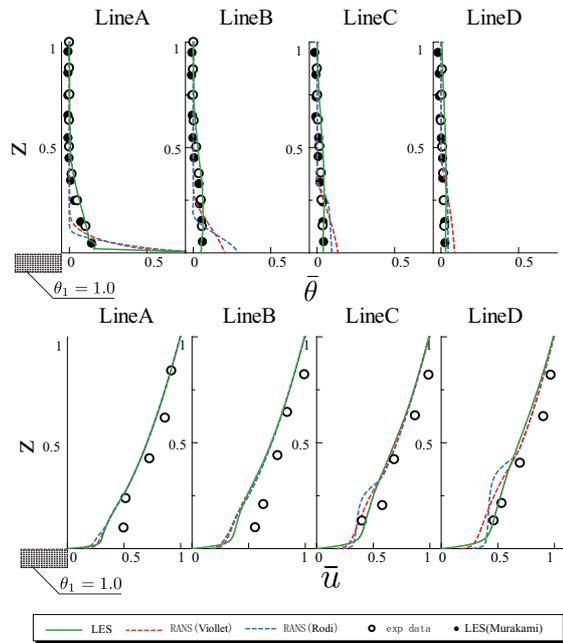


図 - 3 各断面における水平方向流速, 温度分布 (Case1)

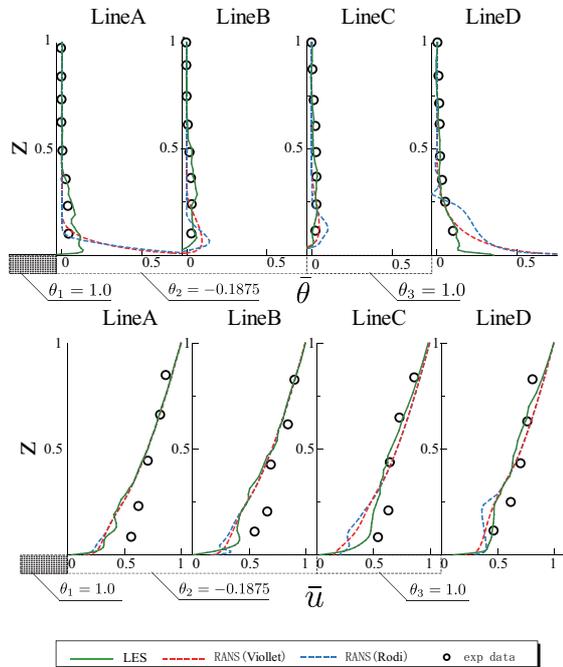


図 - 4 各断面における水平方向流速, 温度分布 (Case2)

Case1 では θ_1 を, Case2 では $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を熱源として与えた。図 - 3, 図 - 4 に Case1, 2 における各断面 (A ~ D) での平均温度, 及び水平方向平均流速の分布を示す。水平方向流速については, RANS では $z = 0.5$ 以下で実験結果よりも過小に評価し, 特に Rodi 型ではその傾向がより顕著に見られた。LES を用いた場合, 流入境界付近では RANS と同様に過小評価しているが, 流出境界に近づくにつれて若干の改善が見られた。温度分布は, RANS (Viollet 型と Rodi 型) を用いた場合, 特に Case2 では底面近傍の温度を過大に評価しているのに対し, 本解析では実験結果と良好に一致している。温度分布図を見ると底面ほど高温になっており, 浮力によ

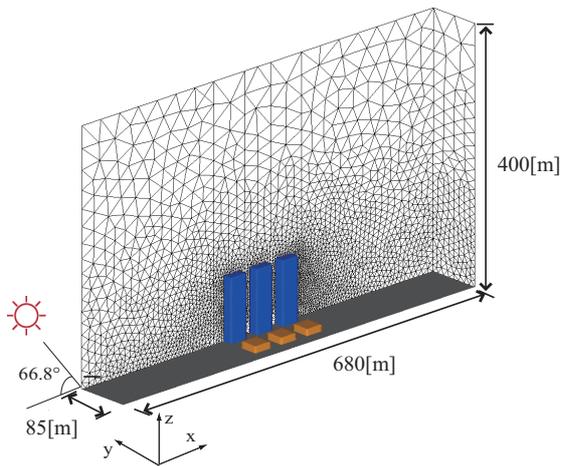


図-5 解析領域

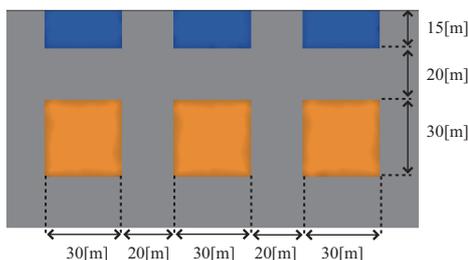


図-6 建物周辺図

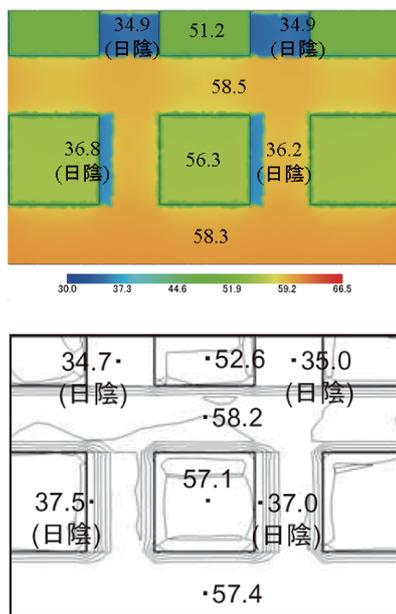


図-7 地表面温度分布図(上:本解析,下:近藤ら)

る鉛直流よりも流入流速による水平流が卓越していることがわかる。そのため、水平流速が結果に大きく影響を与えていると考えられる。また RANS の流速分布はの浮力生産項によって大きく異なることから、LES と RANS の結果に差異が生じた理由の一つとして、の浮力生産項の評価の不適切さが要因であると考えられる。

4.2 高層建物周辺気流解析

熱収支を考慮した本手法の精度検証を行うため、高層建物周辺気流解析を行い、近藤らによる RANS に基づく解析値⁵⁾との比較を行った。解析モデルを図-5、図-6に示す。太陽高度を66.8度とし、放射束10000本を用いて解析を行った。流入境界には $\bar{u}=U_A(Z/Z_A)^{0.25}$ ($Z_A=74.6[m]$ において $U_A=6.0[m/s]$)、流出境界には Traction-free 条件を適用した。上端面、側面に slip 条件、底面、壁面には linear-1/7 power law 型2層モデルを用いた。微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}[sec]$ とした。また、法線面直達日射量は $811.6[W/m^2]$ 、水平面天空日射量は $144.9[W/m^2]$ とした。地中温度は地表面から $dz = 0.1[m]$ の深さで $36.1[]$ 、建物内部温度は $26.0[]$ とした。日射反射率は高層・低層建物の屋根面で $21.0[\%]$ 、舗装面では $7.4[\%]$ とした。

図-7に地表面温度分布の比較図を示す。なお、図中の数値は各面の温度を表す。温度分布の比較より1前後の誤差があるものの、近藤らの解析結果と概ね一致し、妥当な温度分布が得られた。

5. おわりに

本報告では、地表面の熱収支を考慮した非等温場における都市域の大気環境流れ解析を高精度に行うため、LESを用いた安定化有限要素法による解析手法の構築を行った。数値解析例を通じて、以下の結論を得た。

- 地表面高温領域周辺気流解析において、LESを用いた本手法は RANS による結果と比べ、既存の実験結果と定量的に一致しており、本解析手法の有効性が確認できた。
- 高層建物周辺気流解析より、参照解と多少の差異は見られたが、定性的に妥当な地表面温度分布を得ることができた。

今後の課題として、都市域の大規模大気環境流れ解析への適用が挙げられる。

参考文献

- 1) 板橋翔, 岸昌由, 田中聖三, 櫻山和男, 志村正幸: 安定化有限要素法による非等温場風況解析～流出境界条件と熱伝達境界条件の検討～, 応用力学論文集, 9, (2006), pp.131-139.
- 2) T.E.Tezduyar, “Stablized finite element formulations for incompressible flow computations,” Advances in Applied Mechanics, 28 (1992), pp. 1-44.
- 3) 村上, 大場, “床面に温度差のある成層流の気流性状並びに拡散に関する風洞実験,” 日本建築学会大会学術講演梗概集, (1977), pp.213-218.
- 4) 野口, 村上, 持田, 富永, “LES, $k-\epsilon$ モデルによる地表面高温領域周辺の成層流の解析,” 日本建築学会大会学術講演梗概集, (1993), pp.779-780.
- 5) 近藤靖史, 小笠原岳, 大木泰裕, 有働邦広: 建物屋根面の日射性能向上によるヒートアイランド緩和効果, 日本建築学会環境系論文集, Vol.73, No.629, pp.923-929, Jul., 2008.