

安定度を考慮した混合距離に関する新しい微分方程式と大気境界層への適用  
 Derivation of a Differential Equation Related to Mixing Length in View of Atmospheric Stability and  
 its Application to Atmospheric Boundary Layer

土木工学専攻 26号 中島 大樹  
 Hiroki NAKAJIMA

1. はじめに

1.1 接地境界層

地表面からおよそ1~2[km]までの大気層は大気境界層と呼ばれる。この層では地表面の摩擦の作用と熱交換によって乱流が発生し、小規模な対流や乱流の渦運動が活発に起きる。この現象が地面摩擦や地面・水面からの熱や水蒸気の鉛直輸送量を増加させ、集中豪雨や竜巻などの局所的な気象現象の原因になる。更にハドレー循環の生成や台風の発達・維持および地球温暖化などに影響を与える。気温、湿度の鉛直分布や風向風速により決まる風の場に代表される大気構造についての知見を深めることは、局所的もしくは広範囲にわたる気象・気候現象を評価する上で重要である。

1.2 Monin-Obukhovの安定度スケール

接地境界層の乱流状態の度合いを表わす安定度の一つとして、Monin-Obukhov<sup>2)</sup>の安定度スケール $L$ [m]があり、次のように表わされる。

$$L = -\frac{u_*^3}{k \frac{g}{T} \frac{H}{c_p}} \quad (1)$$

ここに $u_*$ : 摩擦速度[m/s],  $k$ : カルマン定数,  $g$ : 重力加速度[m/s<sup>2</sup>],  $T$ : 気温[K],  $H$ : 潜熱輸送量[W/m<sup>2</sup>],  $c_p$ : 定圧比熱[J/g・K]である。理想化された接地層の最下部として、大気粒子間の剪断力、大気の浮力、熱対流フラックスによって大気の安定性が支配される定常で水平方向に一様な気層を想定し、風速および気温等の各種統計量を表わすためのスケールとしてMoninとObukhovにより提案された。

Monin-Obukhovの安定度スケール $L$ は浮力による乱れの生成と風速シアーによる乱れの生成との比に関連した量であり、接地境界層全体を1つの量で表わす安定度である。これまで多くの研究者が野外での観測資料に適用し、その有効性は実証されてきた。

しかしながら、Monin-Obukhovの安定度スケール $L$ を用いる場合、安定度により、長さのスケールとして $z/\zeta$ と $L$ の2つを使い分ける必要があることや、大気不安定の場合に安定度スケール $L$ は長さの次元を持つにも関わらず負の値をとることが不自然な点が存在する。そのため本研究では、大気境界層における各種成分の乱流輸送の挙動が気象現象に与える影響を解明することを目的とし、新しい安定度スケール $L_0$ の導出および導かれた理論と実測データとの比較を行った。

2. 密度成層における乱流モデル

2.1 Prandtlの混合距離理論

Prandtl<sup>1)</sup>はある点に生じる流速 $u$ の変動分 $u'$ は、流体粒子の移動距離 $\ell$ [m]と、その間の平均速度の勾配 $du/dz$ に比例するとし、レイノルズ応力を次のように表した。

$$-\overline{\rho u' w'} = \rho \ell^2 \left| \frac{du}{dz} \right| \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \quad (2)$$

ここに $\rho$ : 空気密度[kg/m<sup>3</sup>],  $z$ : 高度[m]である。 $\ell$ を混合距離といい、変位空気塊が周りの空気と混合せずに、その性質を保持したまま移動する距離を意味している。

また、壁面近傍の乱流運動は壁面により束縛され、混合距離 $\ell$ は地表面からの高度 $z$ に比例するとして、(3)式のように仮定した。

$$\ell = k z \quad (3)$$

2.2 Karmanの力学的相似の仮説

Kalman<sup>3)</sup>は各点での乱流混合の機構は、時間と長さのスケールが異なるに過ぎず、混合距離 $\ell$ はその点の近くの平均速度分布の状態、すなわち速度の変化率に関係すると考え、これらから作られる長さの次元をもつ最も簡単な関数関係として、(4)式のように表した。

$$\ell(z) = k \frac{du/dz}{d^2u/dz^2} \quad (4)$$

### 2.3 密度成層時の混合距離理論

Zilitinkevich<sup>4)</sup>らは、熱供給と乱流のエネルギーバランスを考慮した接地境界層における大気の運動方程式に(4)式を適用する事で、密度成層時の混合距離 $\ell$ を(5)式のように示した。

$$\ell(z) = k \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{dT}{dz}\right)}{2 \left(\frac{du}{dz}\right) \frac{d^2u}{dz^2} - \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{d^2T}{dz^2}\right)} \quad (5)$$

ここに $\alpha$ : 定数,  $T_0$ : 地表面温度[K]である。

### 2.4 大気の安定度を考慮した混合距離理論

上記までに示したモデルは、未知変数が多く観測されたデータが必要であることが問題とされている。そのため山田らは、鉛直方向の気温分布による混合を考慮した一般的に使いやすい混合距離の理論を提案した。大気が静力学平衡であると仮定すると、Monin-Obukhovの相似則の適用範囲である接地境界層内の幅は約100mほどであるため、乾燥空気塊の気圧と基準気圧との比 $p(z)/p_0 \approx 1$ が成立するため、絶対温度で表すと温位 $\theta$ [K]と温度 $T$ に大きな違いが無くなり $\theta/T \approx 1$ とみなせるため、温位 $\theta$ と温度 $T$ の関係を(6)式、(7)式のように示せる。

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \Gamma_d \quad (6)$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{d^2T}{dz^2} \quad (7)$$

ここに $\Gamma_d$ : 乾燥断熱減率[K/m]である。(6)式、(7)式を(5)式に代入すると、温位 $\theta$ を考慮した混合距離 $\ell$ の式(8)を得る。

$$\ell(z) = k \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)}{2 \left(\frac{du}{dz}\right) \frac{d^2u}{dz^2} - \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\right)} \quad (8)$$

温位 $\theta$ による表現を用いることで断熱的变化の影響を無視でき、大気の安定度をそのまま持ち込めるという利点がある。理想気体の気温は高度が上昇するに伴い大気圧が減少し空気塊が膨張する。膨張に伴い空気塊が仕事をするため内部エネルギーは減少し温度が下がる。このように断熱膨張過程によって気温が下がり続けるため、気温勾配は常に負となり、いかなる場合

も混合距離 $\ell$ が負となり得る可能性があることを示している。温位 $\theta$ を導入することでその問題が解決する。流体間に働く剪断力 $\tau$ [m<sup>2</sup>]は(9)式のように表される。

$$\tau(z) = \rho \ell^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \quad (9)$$

(8)式、(9)式を混合距離 $\ell$ に関する式にするために風速分布に関する項を消去する。(9)式を風速 $u$ に関して整理すると、

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{\tau(z)}{\rho}} \quad (10)$$

$\sqrt{\frac{\tau(z)}{\rho}} = H(z)$ として整理すると(11)式、(12)式を得る。

$$\frac{du}{dz} = \frac{H(z)}{\ell} \quad (11)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{H(z)}{\ell^2} \frac{d\ell}{dz} + \frac{1}{\ell} \frac{dH(z)}{dz} \quad (12)$$

(11)式、(12)式を(8)式に代入し $\ell$ に関して整理すると、鉛直方向の気温分布による混合を考慮した混合距離 $\ell$ に関する式(13)が得られる。

$$\frac{d\ell}{dz} - \ell \frac{d \ln H}{dz} + \frac{\ell^2}{H^2} \theta_2(z) + \kappa \frac{\ell^2}{H^2} \theta_1(z) - \kappa = 0 \quad (13)$$

ここに、温位に関する項 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を下記のように定義した。

$$\theta_1(z) = \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{d\theta}{dz}\right) \quad (14)$$

$$\theta_2(z) = \alpha \frac{g}{T_0} \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\right) \quad (15)$$

### 3. 新しい安定度スケールの導入

上節で述べた鉛直方向の気温分布による混合を考慮した混合距離の理論から、新しい安定度スケール及び混合距離を提案する。鉛直気温分布が図-1のように表わせると仮定する。ここに、 $T_0$ : 地表面温度[K],  $h_0$ : ある高度[m],  $T_1$ : ある高度における気温[K]である。

$$\left\{ \begin{array}{l} T(z) = T_1 + (T_0 - T_1) \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) \\ \frac{dT}{dz} = \frac{T_0 - T_1}{h_0} \\ \frac{d^2T}{dz^2} = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

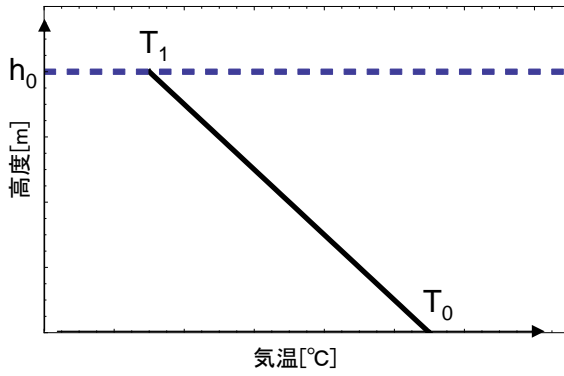


図-1 気温の高度分布と大気境界層の模式図

(16)式を(13)式に代入し混合距離 $l$ の式に直すと、次のように導ける。

$$l(z) = \sqrt{\frac{h_0 T_0 u_*^2}{\alpha g \frac{dT}{dz}}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{\alpha g \frac{dT}{dz}}{h_0 T_0 u_*^2}} k z \right] \quad (17)$$

ここでMonin-Obukhovの安定度スケール $L$ に替わる新しい安定度スケール $L_0$  [m]を導入する。

$$L_0 = \sqrt{\frac{h_0 T_0 u_*^2}{\alpha g \frac{dT}{dz}}} \quad (18)$$

新しい安定度スケール $L_0$ は乱れの生成項と成層効果との比である。Monin-Obukhovの安定度スケール $L$ は大気が不安定の場合は負の値になるが、新しい安定度スケール $L_0$ では大気が不安定の際は虚数解になる。新しい安定度スケール $L_0$ と混合距離 $l$ の関係は次のように表わせる。

$$l(z) = L_0 \tanh \left[ \frac{k z}{L_0} \right] \quad (19)$$

(19)式は一般解だが、中立( $d\theta/dz=0$ )を境に関数形が変わるため、温位勾配により場合分けをすると次のように導ける。

$$l(z) = \begin{cases} L_0 \tan \left[ \frac{k z}{L_0} \right], & \frac{d\theta}{dz} < 0 \\ k z, & \frac{d\theta}{dz} = 0 \\ L_0 \tanh \left[ \frac{k z}{L_0} \right], & \frac{d\theta}{dz} > 0 \end{cases} \quad (20)$$

理論解から得られた混合距離 $l$ の例を図-2に示す。

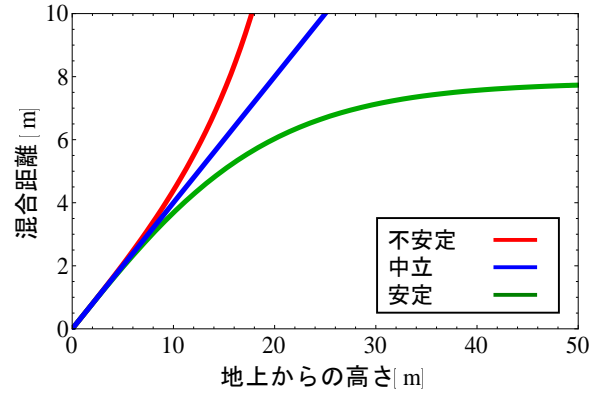


図-2 安定度ごとの混合距離の例

大気が安定の場合、変位空気塊の地表面からの高さが極大に向かうと、混合距離 $l$ は新しい安定度スケール $L_0$ に収束する。大気が不安定の場合、変位空気塊の地表面からの高さが極大に向かうと、混合距離 $l$ も比例し極大に向かう。これは安定の時は変位空気塊の上昇に伴い上下の混合も減少し、不安定の際は変位空気塊の上昇に伴い上下の混合も増加することを示している。大気が安定の場合は地表面からの高さ $z$ と混合距離 $l$ は比例する。これはPrandtlの混合距離理論における壁面近くの混合距離の仮定を表わしている。

#### 4. 新しい安定度スケールを用いた対数則の適用

流体粒子間に働く剪断力 $\tau$ の定義を(21)式に示す。

$$\tau(z) = \rho \ell^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \quad (21)$$

摩擦速度 $u_*$ の定義を(22)式に示す。

$$u_*^2 = \tau / \rho \quad (22)$$

(21)式を(22)式に代入し風速 $u$ について整理すると、風速勾配の式(23)が得られる。

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\ell} \quad (23)$$

摩擦速度 $u_*$ と式(20)を(23)式に代入することで、風速勾配が求まる。

新しい安定度スケール $L_0$ が実現象を表わしうのかを確認するため、2004年6月11日9時に東京都下水道局砂町水処理センターにおいてドップラーソーダにより観測された30分平均鉛直風速分布と、最も近い地点で高層気象観測を行っている茨城県館野観測所の気温気圧データを用いて、理論値との比較を行った。

大気境界層の風速分布、温位分布からガウス・ニュートン法を用いて対数則を求め、摩擦速度、摩擦温度を導出する。摩擦速度と摩擦温度は、縦軸に片対数目盛で地表面からの高さ、横軸に風速を取り、直線に並んだ風速分布、温位分布の延長と縦軸との交点を見ることで求まる。風速鉛直分布を図-3に示す。

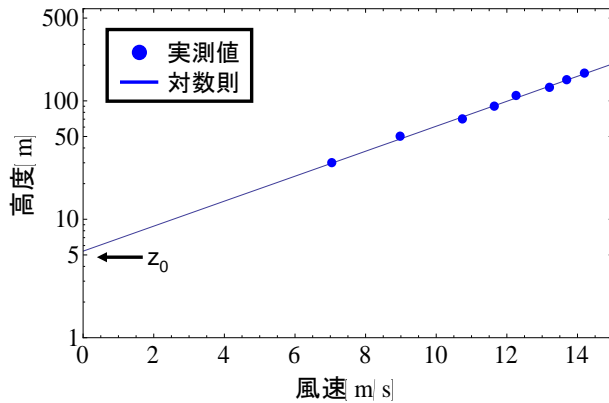


図-3 2004年6月20日9時の風速鉛直分布

図-3から、粗度長 $z_0$ は約5[m]程度であることがわかる。これは風速を観測した東京都下水道局砂町水処理センター付近の堤体の影響と考えられる。

6月20日9時に東京都下水道局砂町水処理センターにおいて観測された30分平均風速鉛直分布と風速鉛直分布とMonin-Obukhovの安定度スケール $L$ を用いた風速の対数プラス直線分布、新しい安定度スケールから求めた風速鉛直分布を重ね合わせた図を図-4に示す。

理論値が実測値におおむね沿い、Monin-Obukhovの安定度スケール $L$ を用いた風速の対数プラス直線分布と比較しても遜色無いことから、新しい安定度スケール $L_0$ が実現象を正しく表わせる事を示した。

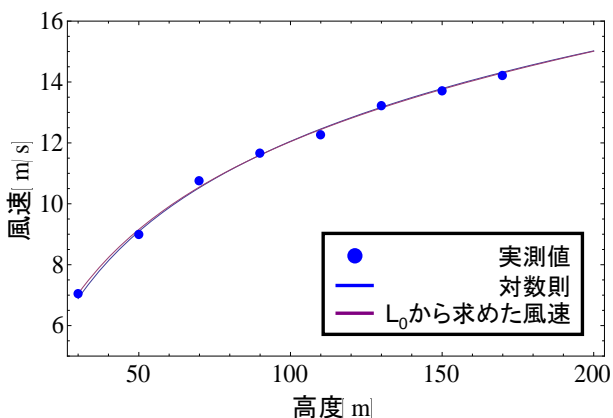


図-4 2004年6月20日9時の風速鉛直分布

## 5. まとめ

- 鉛直方向の気温分布による混合を考慮した混合距離の方程式から新たな混合距離の式を導出した。
- 新しい安定度長を用いることにより鉛直気温分布を考慮した混合距離の理論からPrandtlの混合距離理論における壁面近くの混合距離の仮定を導くことができた。
- Monin-Obukhovの安定度スケールは不安定の際に、長さスケールであるにも関わらず安定度スケールは負の値を取ったが、新しい安定度スケールでは不安定の際、虚数解が出た。
- 新しい安定度スケールを用いることで、長さスケールを使い分けることなく、実現象を正しく表わすことが出来た。

## 参考文献

- Prandtl, L.: Bericht über die ausgebildete Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., 5,136-139.1925.
- Monin, A. S. and Obukhov, A. M: Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere, Tr. Akad. Nauk SSSR Geophys. Inst., 24,163-187.1954.
- Thodore von Kármán : Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften ZU Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 1,58-76. 1930.
- Zilitnikov, S.S.,D, L, Laykhtman : Turbulent regime in the atmospheric surface layer, Izvestiya An SSSR. atmosf. i okeana,1,No.2,150-156,1965.
- 近藤純正：水環境の気象学—地表面の水収支・熱収支—。
- 近藤純正：地表面に近い大気の科学 理解と応用。
- 近藤純正, 山澤弘実：局地風速と現実複雑地表面の粗度, 天気, 30, 553-561, 1983.
- 須田健一, 佐々木淳, 石橋龍吉, 藤井邦雄, 日比一喜, 丸山敬, 岩谷祥美, 田村幸雄：ドップラーソーダを用いた都心部の自然風観測, 第16回風工学シンポジウム論文集, 13-18, 2000.