

主成分解析を用いた中周波数域における振動エネルギー制御 Vibration Energy Control in mid frequency range based on principal component analysis

精密工学専攻 6号 飯井 優太
Yuta Ii

1. はじめに

今日の振動解析では、対象周波数に応じて低周波で有効なモード解析と高周波で有効な統計的エネルギー解析 (Statistical Energy Analysis, 以下 SEA) を使い分ける。しかしその間にある中周波数域 (以下, 中周波) に着目すると, 多数の解析法が提案されているが有効な方法は未確立である。また主成分解析は応答行列を特異値分解し, 振動モードの重なり合った形状を表現する解析法である。主成分解析を用いた解析法⁽¹⁾は過去にも提案されているが, 中周波に絞った解析法は提案されていない。また従来の中周波の判断はモード密度, 内部損失率を利用することが多く, 実験では求め難いものとなっている。本稿ではまずモード解析と SEA の理論的關係を明確化し, それを利用した中周波の定義法⁽²⁾を提案する。中周波を対象とした主成分解析による振動現象把握を実験と解析で検討する。また主成分解析を用いた振動対策として, 簡単な板状モデルにおいてコンポーネント (以下, サブシステム) 間を伝達する大きなパワーの低減によるサブシステムの振動エネルギー低減手法を検討する。最後に複雑なモデルへの適用例として, 自動車エンジンからの伝達パワー低減によるトランスミッションの振動エネルギー低減を試みる。

2. 中周波数領域の定義法の提案

2.1 運動方程式と SEA パワー平衡式の関係⁽²⁾

式(1)のように運動方程式を変位 x について解き, 速度の複素共役 v^* に変換する。入力パワー P_F の式に代入すると, 式(2)を得る。

$$x = \frac{(k - \omega^2 m) - j\eta k}{z} f \quad (1)$$

$$P_F = \frac{1}{2} v^* f = \frac{1}{2} \frac{-j\omega(k - \omega^2 m) + \omega\eta k}{z} f^2 \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{2} j\omega x^* f \quad \text{※ } z = (k - \omega^2 m)^2 + (\eta k)^2$$

ここで η は構造減衰, k は剛性, m は質量である。式(3)の P_M , P_K , P_D はそれぞれ運動エネルギー, ひずみエネルギー, 減衰エネルギーの時間微分 (パワー) を表す。

$$P_M = \frac{1}{2} v^* (-\omega^2 m x) = \frac{1}{2} \frac{j\omega^3 m}{z} f^2 \quad (3.a)$$

$$P_K = \frac{1}{2} v^* k x = -\frac{1}{2} \frac{j\omega k}{z} f^2 \quad (3.b)$$

$$P_D = \frac{1}{2} v^* (j\eta k x) = \frac{1}{2} \frac{\omega\eta k}{z} f^2 \quad (3.c)$$

これより P_M , P_K は純虚数, P_D は実数で, 式(2)の実部, 虚部をとると次式の関係式を得る。

$$P_D = \text{Re}(P_F) \quad (4.a)$$

$$P_K + P_M = j \cdot \text{Im}(P_F) \quad (4.b)$$

式(4)から外力パワーの実部は減衰によって消散される成分, 虚部は運動エネルギー, ひずみエネルギーのパワー和で定在波として存在する成分を表している。

系を一自由度と仮定すると, ω が系の不減衰固有振動数 Ω と一致した場合, $P_K + P_M = j \cdot \text{Im}(P_F) = 0$ となり, 式(1)の運動方程式は式(4.a)と等価になる。

2.2 中周波, 高周波数領域の定義

SEA の適用周波数を判断する場合, 従来はモーダルオーバーラップ係数 (MOF) が利用されている。

$$\text{MOF} = \omega_c \eta n > 1 \quad (5)$$

ω_c は 1/3 オクターブバンドの中心角周波数, n はモード密度を表す。MOF > 1 のとき SEA の適用可能範囲となる。しかし, 実験で構造減衰 η やモード密度 n を求めるには多くの労力が必要なこと, またモーダルオーバーラップ係数の物理的な意味を把握し難いという問題点がある。そこで $\text{Re}(P_F) \gg \text{Im}(P_F)$ となる周波数が SEA の適用可能な周波 (高周波) と定義し, 次式の $\text{Re}(P_F)$, $\text{Im}(P_F)$ のエネルギー比でモード解析と SEA の適用境界となる周波数 (中周波) を説明できるか検証する。

$$\theta = \tan^{-1}(\text{Im}(P_F)/\text{Re}(P_F)) \quad (6)$$

エネルギー比 θ が小さいほど $\text{Im}(P_F)$ が小さいことを表している。

2.3 有限要素法による検証

Fig. 1 に用いる有限要素モデル (以下 FE モデル) を示す。丸印はバネ要素での結合点, 材質は鉄, 板厚は 2.3mm である。構造減衰は 1% とし, バネ要素の剛性は並進 3 自由度が $1.0E+6\text{N/m}$, 回転 3 自由度が $1.0E+6\text{Nm/rad}$ とする。なお入力 は単位インパルス加振である。Fig. 2 に式(4)の検証結果を示す。実部と虚部ともに右辺と左辺が一致している。次に Fig. 3 に θ と MOF の比較を示す。MOF は右肩上がりに値が上昇し続けるのに対し, θ は 35° から 40° 付近で横ばいになる。これより θ と MOF では異なる物理的意味を持つことがわかる。MOF では MOF > 1 となるとき SEA が適用可能となる。これと θ を比較すると 1600Hz 付近で 35° となっている。しかし θ は横ばいであるため, 今回は 55° を低周波と中周波の閾値とし, そこから 3 つ程度の 1/3 オクターブバンドを中周波とする。

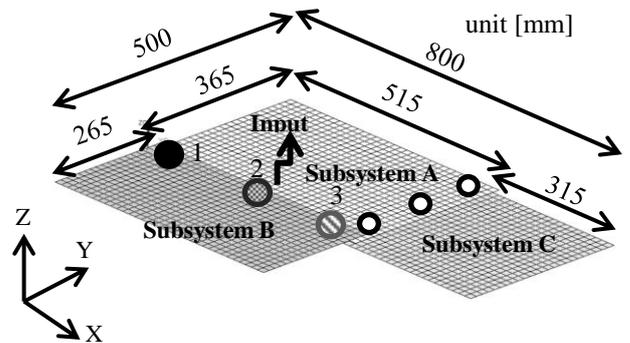


Fig.1 FE model

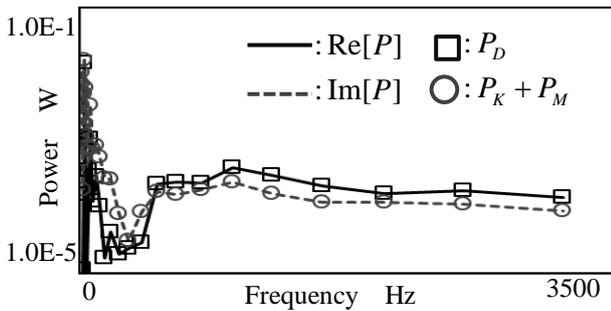


Fig.2 Real and imaginary part of power

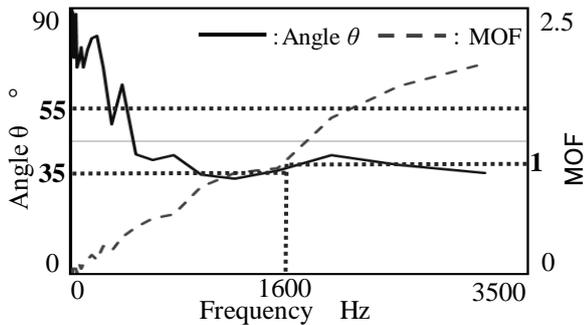


Fig.3 Angle θ and MOF

3. 主成分解析の概要

3.1 主成分解析の理論

主成分解析は、式(7)のように各計測点における応答行列 X_{fi} を特異値分解することにより行われる。(1)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left\{ X_{f1} \right\} \left\{ X_{f2} \right\} \dots \left\{ X_{fm} \right\} \right\} \\
 &= \left[\left\{ \phi_1 \right\} \left\{ \phi_2 \right\} \dots \left\{ \phi_r \right\} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ v_{f1} \right\} \\ \left\{ v_{f2} \right\} \\ \dots \\ \left\{ v_{fm} \right\} \end{bmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

ここで ϕ_i は主成分変形、 λ_i は主成分の寄与率、 v_{fi} は解析周波数域内での主成分の周波数変化を表す。主成分変形はモードの重なりを表現しており、モード解析よりも考慮する変形を少なくできる。

3.2 主成分解析の最適な周波数範囲

Fig. 3 において中周波の範囲内にある中心周波数 800Hz の 1/3 オクターブバンドにおいて検証する。Fig. 4 にその範囲内の一部の Sum FRF を示す。三つの周波数範囲に応答行列を限定し、主成分解析を行う。その主成分変形とピーク周波数における実稼働変形状 (Operating Deflection Shapes, 以下 ODS) の MAC (Modal Assurance Criterion) を Fig. 5 に示す。値が高いほど互いの相関性が高くなる。これを見ると範囲 A から範囲 C へ範囲を狭めていくと、一次の主成分が徐々に ODS に近付いていることがわかる。よって主成分解析を行う際は、適度な周波数範囲をとる必要があると思われる。そこで今回は既存の範囲として 1/3 オクターブバンドを用いる。

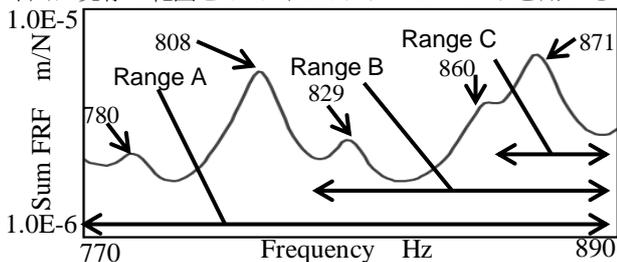
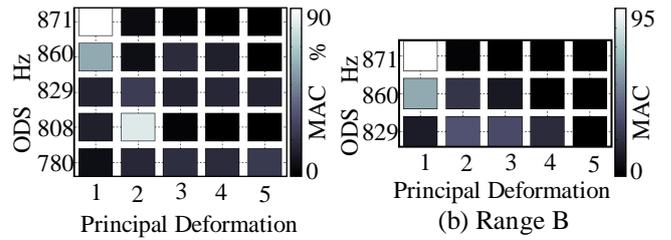
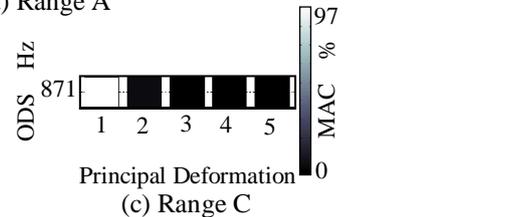


Fig.4 Sum FRF in mid frequency



(a) Range A

(b) Range B



(c) Range C

Fig.5 MAC of ODS and principal

3.3 周波数範囲による主成分変形の変化

次に主成分解析を行う範囲を中周波と高周波にしたときの主成分変形を比較する。Fig. 6 に中周波、Fig. 7 に高周波の一次の主成分変形を示す。なお中周波は先と同様に中心周波数 800Hz の 1/3 オクターブバンド、高周波は MOF > 1 となった中心周波数 1600Hz の 1/3 オクターブバンドでそれぞれ主成分解析を行う。Fig. 6 の中周波では腹と節がわかり易く、対策しやすい形状であることがわかる。一方、Fig. 7 の高周波において主成分解析を行った場合には、主成分変形は中周波に比べ複雑になり、対策しづらくなっている。これより高周波では主成分解析は有効ではなく、SEA で解析する必要がある。

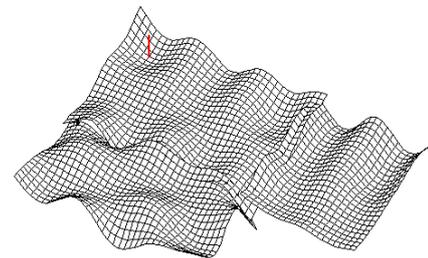


Fig.6 Principal deformation 1 in mid frequency

$[f_c = 800\text{Hz}]$

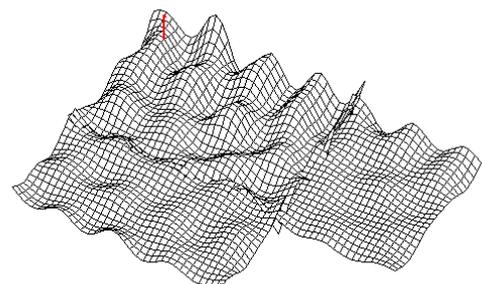


Fig.7 Principal deformation 1 in high frequency

$[f_c = 1600\text{Hz}]$

4. 主成分を利用した振動エネルギー制御

4.1 減衰材による振動エネルギー制御

本節では、対象となるサブシステムの主成分変形に着目し、振動振幅の大きな箇所に減衰材を張った際の運動エネルギーの変化をみる。対象モデルは Fig. 1 の FE モデルを用いる。なお減衰材付加は、構造減衰を対象部のみ高くすることで模

擬する。対象周波数域はFig. 3の範囲のうちから中心周波数800Hzの1/3オクターブバンドとし、対象サブシステムはFig. 1におけるサブシステムBとする。Fig. 8にサブシステムBでの一次と二次の主成分変形の振幅のコンター図を示す。これにおいて一次の主成分変形において振幅が大きい位置に減衰材を付加した場合をFig. 9の(a)に、一次と二次ともに振幅が小さい部分に減衰材を付加した場合を(b)に示す。それらによる運動エネルギーの変化をFig. 10に示す。振幅が大きい部分に減衰材を付加した方が効果的に運動エネルギーを低減できていることがわかる。これより振動モードと同様に主成分変形でも振幅の大きい部分に対策することで効果的な振動低減が可能であると思われる。

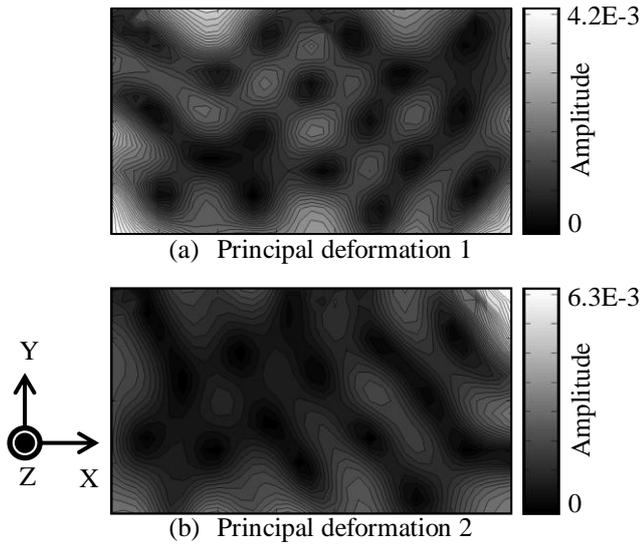


Fig.8 Oscillation amplitude of principal deformation on subsystem B in 800Hz 1/3 octave band

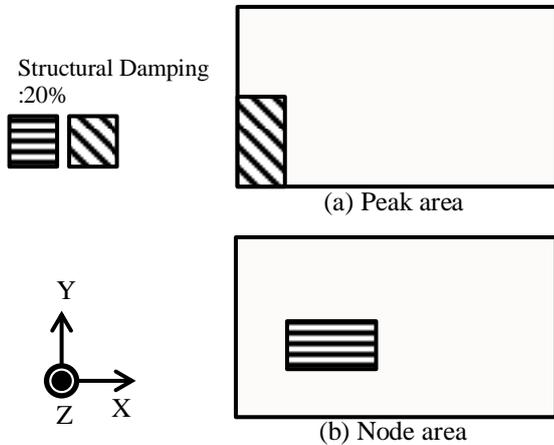


Fig.9 Location of damping area

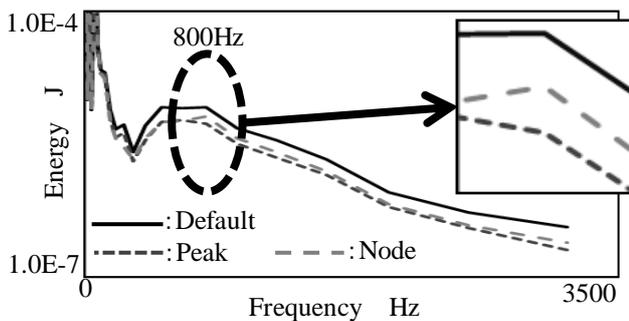


Fig.10 Comparison of kinetic energy in subsystem B by location of damping area

4.2 伝達パワーの導出

次に伝達パワーへの対策による振動エネルギー低減を行うための伝達パワーの式の導出を行う。サブシステムAを加振した場合のパワー平衡式を式(8) (3)表す。上からサブシステムA, B, Cの式である。

$$\begin{cases} P_A = P_{dA} + P_{AB} - P_{BA} + P_{AC} - P_{CA} \\ 0 = P_{dB} + P_{BA} - P_{AB} \\ 0 = P_{dC} + P_{CA} - P_{AC} \end{cases} \quad \text{※ } I, J = A, B, C \quad (8)$$

ここで P_I はサブシステム I の入力パワー、 P_{di} は I の散逸パワー、 P_{IJ} は I から J への伝達パワーを示す。なお P_{IJ} は各結合部の剛性 $k_{IJ,n}$ を、 P_{di} はサブシステムの剛性行列 \mathbf{K}_I を用いて式(9)、(10)で表せる。

$$P_{IJ} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \text{Re}[v_{J,n}^* k_{IJ,n} (x_{I,n} - x_{J,n})] \quad (9)$$

$$P_{di} = \frac{1}{2} \mathbf{V}_I^H (j\eta \mathbf{K}_I \mathbf{X}_I) \quad (10)$$

η は構造減衰を表す。 $v_{I,n}$ と $x_{I,n}$ はサブシステム I の n 番目の結合部の速度と変位である。また \mathbf{V}_I^H は I の速度応答行列の転置、 \mathbf{X}_I は I の変位応答行列である。各サブシステム間の結合部は各 3 箇所あり、式(9)はその総和の伝達パワーを示している。このとき、正味の伝達パワー Π_{IJ} は以下ようになる。

$$\Pi_{IJ} = P_{IJ} - P_{JI} \quad (11)$$

よってサブシステム B, C のパワー平衡式は式(12)となる。

$$\begin{cases} \Pi_{AB} = P_{dB} \\ \Pi_{AC} = P_{dC} \end{cases} \quad (12)$$

解析モデルにおける式(12)の検証結果を Fig.11 に示す。なお入力条件は 2.2 節と同じとする。正味の伝達パワー Π_{IJ} と散逸パワー P_{di} の値が一致していることがわかる。これより、正味の伝達パワー Π_{IJ} を小さくすることで、サブシステム内で消費される振動エネルギーを小さくできると考えられる。なお以下の章で示す伝達パワーは、この正味の伝達パワー Π_{IJ} を示している。

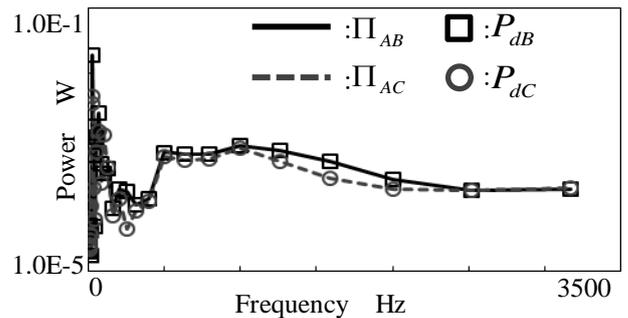


Fig.11 Transmission power and dissipation power

4.3 減衰材による振動エネルギー制御

Fig. 1 のモデルにおいて、対象周波数域の応答行列に対し、主成分解析を行う。対象周波数域は 4.1 節と同様である。また Fig. 12 は一次の主成分によるサブシステム A から B の結合点ごとの伝達パワーである。Fig. 12 より伝達パワーは結合点 1 が大きく、結合点 3 が小さいことがわかる。そこで結合点 1, 3 のそれぞれの剛性を $5.0E+5 \text{N/m}$ に下げた場合のサブシステム B での運動エネルギーを Fig. 13 において比較する。伝達パワーの大きい結合点の剛性を下げることで、効果的に運動エネルギーが減少していることがわかる。

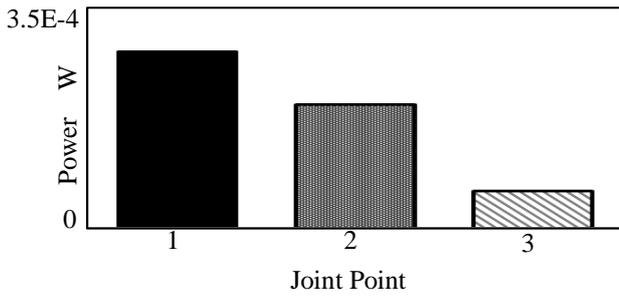


Fig.12 Transmission power A to B of principal deformation 1

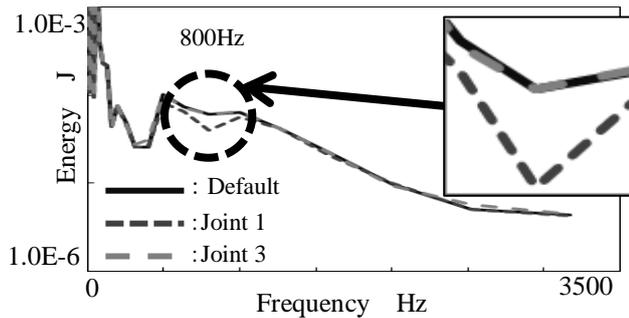


Fig.13 Kinetic energy in subsystem B

5. 複雑なモデルへの適用

4.3節の内容を自動車エンジンにおいて試みる. Fig. 14に実験セットアップを示す. エンジンを加振し, 拘束条件をFree-Free, 結合部の締付トルクを20Nmとする. 先と同様に入力パワーの実部と虚部の比より求める. Fig. 15にその結果を示す. これより中心周波数3150Hzの1/3オクターブバンドを対象周波数域とする. 実験では結合部の剛性を求められないため, 結合部5箇所全ての締付トルクが一定より, 剛性についても一定と仮定し, 式(13), (14)に示す各結合点のパワー参考値 $II'_{U,n}$ を評価する.

$$P'_{U,n} = P'_{U,n} - P'_{U,n} \quad (13)$$

$$P'_{U,n} = \frac{1}{2} \text{Re}[v_{J,n}^* (x_{I,n} - x_{J,n})] \quad (14)$$

一次の主成分による伝達パワー参考値 $II'_{U,n}$ を Fig. 16 に示す. これより結合点5が最大, 1が最小である. 結合点1, 5において, それぞれ締付トルクを10Nmに変更し, エンジンとトランスミッションの間にかませたワッシャーを金属から径の小さいゴム輪に変更した. Fig. 17にその結果のトランスミッションの運動エネルギーの変化を示す. 対象周波数域において効果的に振動エネルギーが低減している.

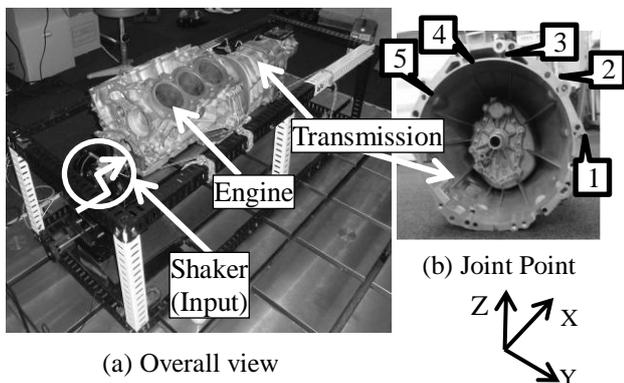


Fig.14 Setup

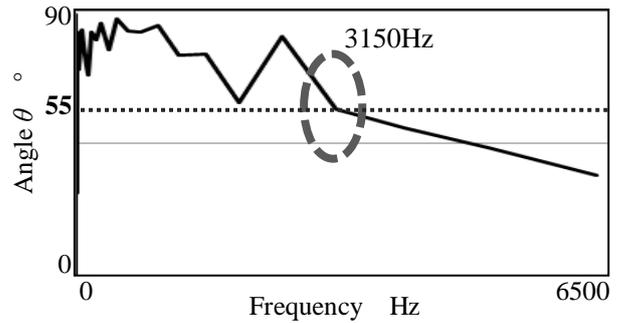


Fig.15 Definition of mid frequency

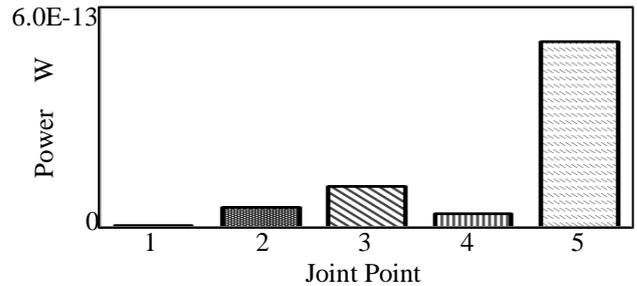


Fig.16 Transmission power from Engine to Transmission of principal deformation 1

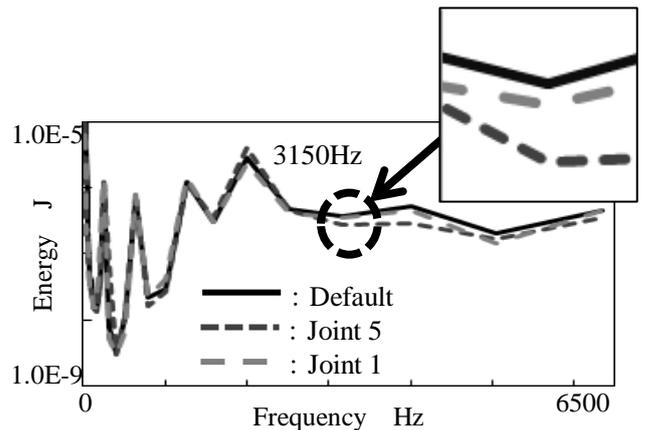


Fig.17 Kinetic energy in transmission

5. まとめ

- (1) 運動方程式とパワー平衡式の理論的關係を明確化し, それを用いて入力パワーによる中周波の定義法を提案した.
- (2) 主成分解析は適当な周波数域に限定することで, より有効的に活用できることを確認した.
- (3) 主成分変形パターンの振幅が大きい箇所への減衰付加により, 効率的に振動低減が可能であることを確認した.
- (4) 主成分において伝達パワーが大きな箇所の剛性を下げることにより, 対象サブシステムの振動低減が可能であることを確認した.
- (5) 複雑なモデルに対して, 伝達パワーに応じた剛性変更が有効であることを確認した.

参考文献

- (1) 望月隆史, 長尾豊, D&D Conference 2006 論文集, No. 06-7 (2006)
- (2) 飯井優太, 古屋耕平, 大久保信行, 戸井武司, 瀬戸厚司, 鹿子慎太郎, 山本豊樹, 日本機械学会関東支部第18期総会講演会講演論文集, No. 120-1 (2012) pp97-98
- (3) 大野順一, 山崎徹, 機械音響工学, 森北出版, 東京 (2010) pp157-161