

一般化線形相補性理論と整数計画法を用いた

区分的線形抵抗回路の完全解析

Complete Analysis of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using

the Generalized Linear Complementarity Theory and Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻 加藤 弘之

Hiroyuki KATO

1. まえがき

区分的線形抵抗回路の解析では、非常に複雑な形状の解集合をもつ回路を扱うことがある [1]。例えば電圧制御型でも電流制御型でもない抵抗素子を含む回路、複数個の解をもつ回路、解の個数が無限となる回路、解集合が曲線、平面などの連続集合となる回路、解集合が有界でない回路、複数の特性曲線をもつ回路などである。このような回路はいわゆる理論的研究やカオス、ニューラルネットワークの研究などで頻出する。また回路シミュレーションでも、部分回路のモデリングなどによりこのような回路が生じることがある。このような複雑な形状の解集合をもつ回路のすべての解を求めることを、文献 [1] にならって、完全解析 (complete analysis) と呼ぶことにする。

完全解析は、ニュートン法、ホモトピー法、区間解析などで対処することはできない。これに対し、文献 [1] では区分的線形回路の解析を一般化線形相補性問題 (generalized linear complementarity problem: GLCP) に定式化し、それを解くことによって完全解析を実現する方法を提案している。また文献 [2] ではそのような一般化線形相補性問題を解くためのアルゴリズムを提案している。しかし文献 [1],[2] のアルゴリズムは理論が難しい上に、インプリメントの際にかなり複雑なプログラミングや専門知識を必要とする。そのため文献 [1] の方法は、初心者や非専門家にとっては実現容易性に欠ける、かなり敷居の高い方法となっている。特に大学院生レベルの研究者が「ちょっと使ってみよう」と考えた場合に、短時間でインプリメントできるような方法とはなっていない。既成ソフトに関して、線形相補性問題 (linear complementarity problem: LCP) に対しては商用 / 非商用のソフトウェアが存在す

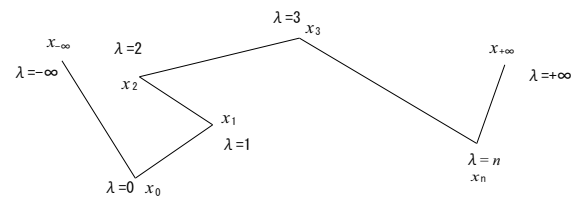


図 1 区分的線形曲線

るが [3]、一般化線形相補性問題に対しては、フリーのソルバーは現在存在しない。

ところで、近年、整数計画法の分野が飛躍的に発展し、かなり大規模な整数計画問題が実行時間内で解けるようになってきている [4],[5]。それにより、SCIP [6], CPLEX [7] といった非常に優れた商用 / 非商用のソフトウェアが提供されている。

そこで本研究では、近年の整数計画ソルバーの驚異的發展を背景に、一般化線形相補性問題を等価な混合整数計画問題で記述し、それを既存の整数計画ソルバーで解くことにより区分的線形抵抗回路の完全解析を行う、実現容易性に優れた方法を提案する。

2. 区分的線形抵抗回路の一般化線形相補性問題への定式化

本章では区分的線形抵抗回路を一般化線形相補性問題に定式化する。

まず、実数 λ に対し以下のような表記を導入する。

$$\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}, \quad \lambda^- = \max\{-\lambda, 0\} \quad (1)$$

次に図 1 に示すような R^n における区分的線形曲線 (折れ線) を考える。 $n+1$ 個の折れ点を表す $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 及び方向を表す $x_{+\infty}$ と $x_{-\infty}$ を導入すると、図 1 の折れ線は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{-\infty} \cdot \lambda^- + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \lambda^+ \\
&+ \sum_{k=2}^n (\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2}) \cdot \lambda_{k-1}^+ \\
&+ (\mathbf{x}_{+\infty} - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}) \cdot \lambda_n^+ \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_j^+ - \lambda_j^- &= \lambda^+ - \lambda^- - j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\lambda^+, \lambda^-, \lambda_j^+, \lambda_j^- &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\lambda^+ \cdot \lambda^- &= 0, \quad \lambda_j^+ \cdot \lambda_j^- = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

式 (2) を区分的線形抵抗回路の混合方程式に代入して整理すると、次のような形の一般化線形相補性問題が得られる [1] .

$$\begin{aligned}
M\mathbf{w} + N\mathbf{z} &= \mathbf{q} \cdot \alpha \\
\mathbf{w}, \mathbf{z} &\geq \mathbf{0}, \quad \alpha \geq 0 \\
\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{z} &= 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

ただし、 $M \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 、 $N \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 、 $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ であり、 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ 、 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ 、 $\alpha \in \mathbf{R}$ が解析対象である。ちなみに、式 (3) で行列 M が単位行列で $\alpha = 1$ となるのが通常の線形相補性問題である。一般化線形相補性問題は $m < n$ の場合も含み、また非負スカラー α は解集合が非有界となる方向の解を考慮するために付けられている。

3. 提案手法

本章では整数計画法を用いて一般化線形相補性問題 (3) の解集合を導出する方法を提案する。

3.1 整数計画法を用いたアルゴリズム

整数計画ソルバーを用いて一般化線形相補性問題の解集合を得るために、まず等価な混合整数計画問題に定式化する。そのような混合整数計画問題を解くことにより、相補性条件を満たした解候補を得ることができる。次に得られた解候補に対して、extreme ray [1] の判定を行うことにより、式 (3) の解集合を導出する。また特性曲線を描写する場合は、cross-complementary 条件 [2] を使用し得られた解の隣接性を調べる。すなわち、提案手法は次のような手順のアルゴリズムとなる。

Step 1 (解候補の列挙): 式 (3) を混合整数計画問題に定式化しすべての解候補 (相補性条件を満たす解) を列挙する。

Step 2 (extreme ray の判定): Step 1 で列挙した解候補が extreme ray であるかを判定する。特性曲線を描写する場合 ($m < n$) は Step 3 に進む。

Step 3 (解の隣接性の判定): Step 2 で導出した解集合に対し cross-complementary 条件を用いて解の隣接性を調べ、特性曲線を描写する。

以下、各 Step の詳細について述べる。

3.2 解候補の列挙

式 (3) を混合整数計画問題に記述するために式 (3) を制約式とした混合整数計画問題を考える。式 (3) の第 1 式は変数分離されている線形等式であるため、そのまま制約式として扱えるが、第 3 式の相補性条件は変数分離されていないため、そのままでは制約式として扱うことができない。そこで相補性条件 $\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{z} = 0$ を以下のように 0-1 変数を用いた変数分離されている等価な線形不等式に置き換える。

$$\begin{aligned}
w_l &\leq L\mu_l \\
z_l &\leq L(1 - \mu_l) \\
\mu_l &\in \{1, 0\}, \quad l \in D \quad (4)
\end{aligned}$$

ただし、 L は十分に大きな正の定数、 D は \mathbf{w}, \mathbf{z} の添え字集合とする。式 (4) は 0-1 変数 μ_l, t_l によって w_l, z_l のどちらか一方が必ず 0 となる相補性条件を表現している。式 (4) より式 (3) は次のような混合整数計画問題に記述できる。

$$\begin{aligned}
\text{最大化:} \quad & \sum_{l \in D} \mu_l \\
\text{制約条件:} \quad & M\mathbf{w} + N\mathbf{z} = \mathbf{q} \cdot \alpha \\
& w_l \leq L\mu_l \\
& z_l \leq L(1 - \mu_l) \\
& \mu_l \in \{1, 0\}, \quad l \in D \quad (5)
\end{aligned}$$

式 (5) は式 (3) と等価であるため、式 (5) の最適解が得られたときの \mathbf{w}, \mathbf{z} の値が式 (3) の解候補となる。目的関数が $\sum_{l \in D} (\mu_l)$ と μ の総和となっているのは、相補性条件を満たすすべての解を導出するためである。式 (5) のすべての解を求めることにより式 (3) の解候補を列挙することができる。

3.3 extreme ray の判定

解候補が extreme ray となるには 0 となる要素が他の解に包括されていないという条件を満たす必要がある。extreme ray の判定を整数計画法を用いて行うため以下の 0-1 整数計画問題を考える。

表 1 式 (3) の解の例

解	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	α
1	2	1	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1	0
3	1	1	1	0	0	0	0

最小化：
$$\sum_{l \in D} (\mu_l + t_l)$$

制約条件：
$$\sum_{l \in \mu(k)} \mu_l + \sum_{l \in t(k)} t_l + \alpha_k \cdot \alpha$$

$$\geq (|\mu(k)| + |t(k)| + \alpha_k) \cdot \rho_k \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \rho_k = 1$$

$$\mu_l, t_l, \alpha_k, \alpha, \rho_k \in \{0, 1\}$$

$$k = 1, 2, \dots, \sigma$$

ただし、 σ は解候補の個数とする。また、 k 番目の解候補において、 α_k を α の値、1 の値をもつ μ, t の添え字集合をそれぞれ $\mu(k), t(k)$ とする。また $|\mu(k)|, |t(k)|$ をそれぞれの集合の要素数とする。上記の最適解が得られたとき、 ρ の中で 1 つだけが $\rho_k = 1$ となり、 k 番目の解候補が extreme ray であると判定することができる。解が得られ次第、その解を除外する制約式を追加していくことで式 (3) の解集合を導出することができる。

3.4 解の隣接性の判定

特性曲線（駆動点特性、伝達特性）を求める場合 ($m < n$)、Step 2 で得られた解集合は特性曲線の折れ点もしくは方向を示している。したがって特性曲線を描写するためには隣接する解を調べる必要がある。隣接性を調べるために文献 [1] の定理 3 に示されている cross-complementary 条件を用いる。文献 [1] の定理 2 より cross-complementary 条件 $(w^i)^t \cdot z^k = (w^k)^t \cdot z^i = 0, i \neq k$ を満たす二つの解は隣接している。提案手法では、整数計画法を用いて隣接する二つの解を調べる。まず、整数計画法を用いた cross-complementary 条件の判定について述べる。

Step 2 の解の判定で表 1 のような解が得られたとする。その場合、 $(w^1)^T \cdot (z^2) = (w^2)^T \cdot (z^1) = 0$ となるため、解 1 と解 2 は隣接している。このような隣接性を調べるためには Step 2 において解候補が extreme ray と判定された際の 0-1 変数を使用し、以下のような 0-1 整数計画問題を用いる。ただし、 K は Step 2 で得た解の個数とする。

後は cross-complementary の判定における制約の付加

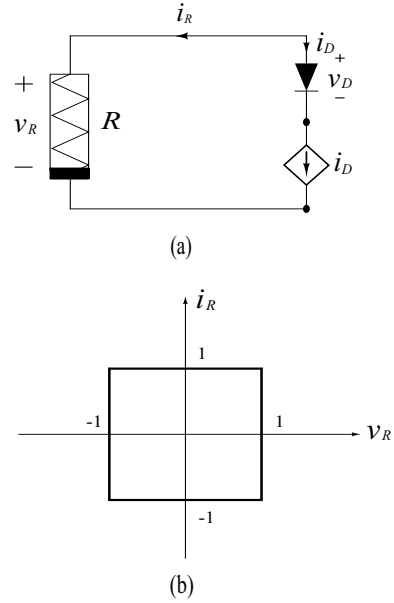


図 2 区分的線形回路及び区分的線形抵抗の $v-i$ 特性

方法を説明すれば提案手法の全容を示すことが完了するが、紙面の都合により割愛する。

最大化：
$$\sum_{l \in D} (\mu_l + t_l)$$

制約条件：
$$\sum_{l \in \mu(k)} \mu_l + \sum_{l \in t(k)} t_l \geq (|\mu(k)| + |t(k)|) \cdot p_k$$

$$\mu_l + t_l \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^K p_k = 2$$

$$\mu_l, t_l, p_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

(7)

式 (7) の最適解が得られ $p_i = p_k = 1$ となった場合、 i 番目の解と k 番目の解が隣接している。

4. 数 値 例

文献 [1] で例題 4 として扱われている図 2 のような区分的線形回路の解析を行う。図 2(b) の区分的線形抵抗は式 (2) で表現することができ、ダイオード特性も相補性条件を用いて以下のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} i_d \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d^+ \\ -\lambda_d^- \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\lambda_d^+, \lambda_d^- \geq 0$$

$$\lambda_d^+ \cdot \lambda_d^- = 0$$

表 2 式 (9) の解集合

	1	2	3	4	5	6	7	8
λ^+	0	0.5	2.5	3	4	0	0	100
λ_1^+	0	0	1.5	2	3	0	0	100
λ_2^+	0	0	0.5	1	2	0	0	100
λ_3^+	0	0	0	0	1	0	0	100
λ_4^+	0	0	0	0	0	0	0	100
λ_d^+	1	0	0	1	1	0	0	0
λ^-	0	0	0	0	0	0	100	0
λ_1^-	1	0.5	0	0	0	0	100	0
λ_2^-	2	1.5	0	0	0	0	100	0
λ_3^-	3	2.5	0.5	0	0	0	100	0
λ_4^-	4	3.5	1.5	1	0	0	100	0
λ_d^-	0	0	0	0	0	100	0	0
α	1	1	1	1	1	0	0	0

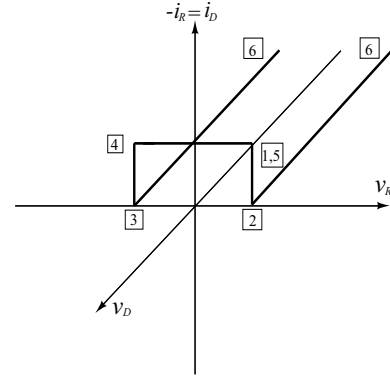


図 3 区分的線形回路及び区分的線形抵抗の $v-i$ 特性

相補性条件を用いた素子特性を図 2(a) から導出される回路方程式に代入すると以下の一般線形相補性問題を導出することができる。

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^+ \\ \lambda_1^+ \\ \lambda_2^+ \\ \lambda_3^+ \\ \lambda_4^+ \\ \lambda_d^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^- \\ \lambda_1^- \\ \lambda_2^- \\ \lambda_3^- \\ \lambda_4^- \\ \lambda_d^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \alpha$$

$$\begin{aligned} \lambda_i^+, \lambda_i^- &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda^+, \lambda^-, \lambda_d^+, \lambda_d^-, \alpha &\geq 0 \\ \lambda^+ \cdot \lambda^- &= \lambda_1^+ \cdot \lambda_1^- = \lambda_2^+ \cdot \lambda_2^- \\ &= \lambda_3^+ \cdot \lambda_3^- = \lambda_4^+ \cdot \lambda_4^- = \lambda_d^+ \cdot \lambda_d^- = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式 (9) に対して本手法を適用した結果を表 2 に示す。ただし、 $H = 100$ とし、整数計画ソルバーには SCIP を用いた。表 2 の解集合を用いることにより図 3 の $v-i$ 特性を描写することができる。

5. むすび

本論文では、区分的線形抵抗回路を一般化線形相補性問題で記述し、それを等価な混合整数計画問題に定式化し

て既存の整数計画ソルバーで解くことにより、複雑な形状の解集合を簡単に求められることを示した。本手法では文献 [2] のアルゴリズムをプログラミングする必要はなく、整数計画ソルバーだけを用いて完全解析を行うことができる。

謝辞 本研究を行うにあたり、多大なる御指導を賜りました山村清隆教授に心より感謝の意を表します。また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します。

文 献

- [1] L. Vandenberghe, B.L. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity program applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no.11, pp.1382-1391, Nov. 1989.
- [2] B. De Moor, L. Vandenberghe and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions," Mathematical Programming, vol.57, no.1-3, pp.415-426, May 1992.
- [3] 茨木俊秀, 福島雅夫, FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, 東京, 1991.
- [4] 今野 浩, 役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれ女王」の 50 年, 日本評論社, 2005.
- [5] 宮代隆平, 松井知己, "ここまで解ける整数計画," システム/制御/情報, vol.50, no.9, pp.363-368, Sept. 2006.
- [6] SCIP (Solving Constraint Integer Programs); <http://scip.zib.de/>
- [7] IBM ILOG CPLEX; <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex/>
- [8] 山村清隆, "数値計画法の非線形回路解析への応用," 第 22 回 回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, pp. 264-269, April 2009.
- [9] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.236, issue 11, pp.2844-2852, May 2012.
- [10] 山村清隆, "SPICE 指向型数値解析法 —式を回路で記する非線形問題の解法—," 信学誌, vol.88, no.12, pp.981-988, Dec. 2005.
- [11] W. Kuroki, K. Yamamura, and S. Furuki, "An efficient variable gain homotopy method using the SPICE-oriented approach," IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol.54, no.7, pp.621-625, July 2007.