修士論文要旨 (2012 年度)

整数計画法を用いた 区分的線形抵抗回路の全解探索法に関する研究

Finding All Solutions of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻　　小林　玄宙
Hiromichi　KOBAYASHI

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形回路のすべての直流解を求める効率的かつ実用的なアルゴリズムを確立することは，集積回路設計における重要な未解決問題の一つである．この問題に対しては様々なアルゴリズムが提案され，特に最近のアルゴリズムでは大規模な非線形方程式の全解探索にも成功している [1], [2]．しかし，これらのアルゴリズムはインプリメンテーションの際に高度な専門知識と複雑なプログラミング技術を必要とするため，初心者や非専門家には敷居の高い方法であった．この問題に対し，実現容易性を考慮して，区分的線形回路の全解探索問題を混合整数計画問題に定式化し，整数計画法のソフトウェアを適用する手法が提案されている [3]．この手法は近年，整数計画に関する研究の発展により可能になったもので [4], [5], CPLEX をはじめとする整数計画法のソフトウェアを利用することができ，解析に要する時間は利用するソフトウェアと定式化手法に依存している．そこで本研究では，混合整数計画問題への新たな定式化手法を提案することで計算効率向上を図る．

2. 対象とする問題

n 個の区分的線形抵抗を含む抵抗回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \triangleq \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

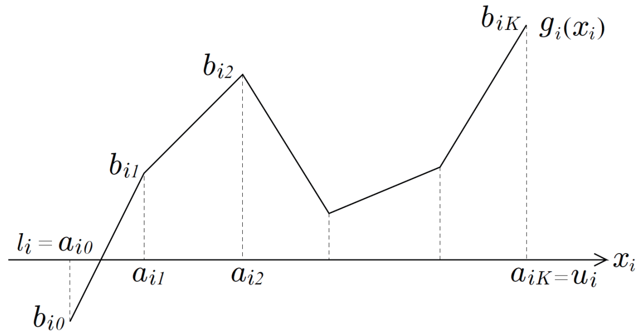

図 1　区分的線形関数

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す区分的線形関数（ただし各成分は一変数），$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{r}$ は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．また,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^T$ とする．

3. 区分的線形関数の表現と定式化

本章では 0-1 変数を用いて区分的線形関数を表現と定式化について述べる．従来の定式化手法の例として δ フォームを紹介し，提案手法である新しい定式化手法について説明する．

3.1 δ フォーム

文献 [6] において “Model　” として紹介さているモデルで，一般に δ フォームと呼ばれている方法を述べる．図 1 のような i $(i = 1, \ldots, N)$ 番目の区分的線形関数に対して，δ フォームを用いると次のような混合整数計画問題に定式化できる．

最大化：x_1

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}\\
&x_i=a_{i0}+\sum_{j=1}^{K}\delta_{ij}\\
&y_i=b_{i0}+\sum_{j=1}^{K}\frac{b_{ij}-b_{ij-1}}{a_{ij}-a_{ij-1}}\delta_{ij}\\
&\Delta_{i1}\mu_{i1}\le\delta_{i1}\le\Delta_{i1}\\
&\Delta_{ij}\mu_{ij}\le\delta_{ij}\le\Delta_{ij}\mu_{ij-1}\\
&0\le\delta_{iK}\le\Delta_{iK}\mu_{iK-1}\\
&\mu_{ij}\in\{0,1\}\quad(j=1,2,\ldots,K-1)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3.2 新しい定式化手法

今回提案する新手法では，正の補助変数 $\lambda_{ij}(i=1,2,\ldots,N;j=0,1,2,\ldots,K)$ を導入することで，図 1 のような i $(i=1,\ldots,N)$ 番目の区分的線形関数を次のような混合整数計画問題に定式化する．

最大化：x_1

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}\\
&x_i=a_{i0}+(a_{i1}-a_{i0})\lambda_{i1}\\
&\qquad+\sum_{j=2}^{K}(a_{ij}-2a_{ij-1}+a_{ij-2})\lambda_{ij}\\
&y_i=b_{i0}+(b_{i1}-b_{i0})\lambda_{i1}\\
&\qquad+\sum_{j=2}^{K}(b_{ij}-2b_{ij-1}+b_{ij-2})\lambda_{ij}\\
&\mu_{i1}\le\lambda_{i1}-\lambda_{i2}\le1\\
&\mu_{ij}\le\lambda_{ij}-\lambda_{ij+1}\le\mu_{ij-1}\\
&0\le\lambda_{iK}\le\mu_{iK-1}\\
&\mu_{ij}\in\{0,1\}\quad(j=1,\ldots,K-1)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

この定式化手法では λ_{ij} が各点 x_{ij-1} からの進み幅の比を表している．このため，x_i が第 j 番目の小区間の値を表すためには，λ が

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{ik}-\lambda_{ik+1}=1(k<j)\\
&\lambda_{ik}-\lambda_{ik+1}=0(k>j)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となる必要がある．

この手法は区分が等分割の場合，線形項の $x_{ij}-2x_{ij-1}+x_{ij-2}$ が 0 となり非ゼロ要素数を減らすことができる．そのため従来の手法に比べて計算効率の向上が見込める．

4. 制約式の削減手法

従来の手法においては，混合方程式の区分的線形項である $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ に対して 0-1 変数を用いた定式化を行い，混合方程式の変数を含む項 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}$ に制約を与える事で混合整数計画問題へと定式化していた．今回提案する手法では混合方程式の変数を含む項のすべてが区分的線形項としてみなせる事に着目し，混合方程式の変数を含む項すべてに対して 0-1 変数を用いた定式化を行う．

この方法により変数 y_i,x_i を削減でき，それに伴い y_i,x_i の制約式を減らすことができる．このため計算効率の向上が見込めるのに加え，入力する式の数が減るため従来よりも実装がより容易になることが期待できる．また，この削減化手法は従来の定式化手法にも適用できる．

4.1 新しい定式化手法における削減

新しい定式化手法に対して制約式の削減を行うと，次式で表すことができる．

最大化：x_1

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&f_h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}b'_{i0}+\sum_{i=1}^{N}(b'_{i1}-b'_{i0})\lambda_{i1}\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{K}(b'_{ij}-2b'_{ij-1}+b'_{ij-2})\lambda_{ij}-r=0\\
&\mu_{i1}\le\lambda_{i1}-\lambda_{i2}\le1\\
&\mu_{ij}\le\lambda_{ij}-\lambda_{ij+1}\le\mu_{ij-1}\\
&0\le\lambda_{iK}\le\mu_{iK-1}\\
&\mu_{ij}\in\{0,1\}\quad(j=1,\ldots,K-1)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし，$h(h=1,\ldots,M)$ は制約式番号を表し，各 $b'ij$ は混合方程式の変数を含む項 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ に各 x_{ij} を代入した値である．式 (3) と比べてみると変数 y_i,x_i とそれに関する制約式が削減されていることがわかる．

4.2　δ フォームにおける削減

δ フォームに対して制約式の削減を行うと，次式で表すことができる．

最大化：x_1

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&f_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} b'_{i0} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} \frac{b'_{ij} - b'_{ij-1}}{a_{ij} - a_{ij-1}} \delta_{ij} - r = 0 \\
&\delta_{i1} \leq \Delta_{i1} \\
&\delta_{ij} \geq \Delta_{ij}\mu_{ij} \\
&\delta_{ij} \leq \Delta_{ij}\mu_{ij-1} \\
&\delta_{iK} \geq 0 \\
&\mu_{ij} \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, K-1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

式 (2) と比べてみると，こちらも変数 y_i, x_i とそれに関する制約式が削減されていることがわかる．

5.　IBM ILOG CPLEX

IBM ILOG CPLEX(以下 CPLEX と略記) は IBM 社が提供する，線形計画問題，混合整数計画問題，二次計画問題などを解くことのできる最適化ソフトウェアである．バージョ11 までは商用のソフトウェアであったが，バージョン 12 からはアカデミックフリーとなっており，商用目的でない研究者や学生ならば，IBM のライセンスを登録することによって無償で利用することができる．CPLEX は数ある整数計画法のソフトウェアの中でも，最も効率的なソフトウェアの一つとして知られており，10 年前までは「NP 困難」という呪縛からとても解けないと考えられた数千〜数万変数／制約クラスの整数計画問題を実用的な計算時間で解くことができる．

CPLEX には解プール (solution pool) という得られた解を保持する機能があり，この機能を利用することにより簡単に全解探索を行うことができる．本研究ではこの解プール機能を用いて以下の例題において全解探索を行った．

6.　数　値　例

6.1　例題 1：トンネルダイオード回路

n 個のトンネルダイオードを含む区分的線形回路 [3] を考える．この回路は区分的線形項が以下の式で表わされる．

$$
2.5x_i^3 - 10.5x_i^2 + 11.8x_i - i + \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}
$$

区分的線形関数の分割数は $K = 10$ とした．この回路に対し，新しい定式化フォーム，δ フォームをそれぞれ適用したときに得られた解の個数 S と計算時間を表 1 に示す．

表 1　例題 1 の計算時間 (秒)

		δ		提案手法	
n	S	従来	改良	従来	改良
10	7	0.1	0.1	0.3	1
20	7	0.8	0.1	1	2
30	7	1	0.1	3	2
40	7	0.1	0.1	4	3
50	9	9	0.1	9	12
60	9	8	0.1	24	19
70	9	8	0.1	26	16
80	7	9	0.1	17	12
90	9	42	0.2	90	39
100	9	43	0.2	78	48
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	11	265	5	329	243
200	9	740	5	777	320
250	9	894	3	762	1021
300	11	1601	4	1403	1366
350	9	3106	4	2311	1877
400	3	3488	6	3108	2901
450	3	6201	9	6375	5147
500	3	8358	8	7513	5693

7.　例題 2：トランジスタ回路

文献 [3], [7] などで例題として解かれている図 5.1–5.8 のトランジスタ回路に対して，提案手法及び従来法を適用したときの結果を表 2 に示す．ただし初期領域を $([-20, 0.5], \ldots, [-20, 0.5])^T$ とし，非線形関数を近似する区分的線形関数の線分数は $K = 10$ とした．また，分割点は文献 [3], [7] と同一の条件を使用しているため，トランジスタの素子特性に合わせて等分割とされていない．

表 2　例題 2 の計算時間 (秒)

回路	S	δ		提案手法	
		既存	削減	既存	削減
回路例 1	9	0.15	0.14	0.22	0.23
回路例 2	3	0.05	0.04	0.1	0.35
回路例 3	11	0.08	0.17	0.79	1.33
回路例 4	1	1.22	0.3	1.28	1.68

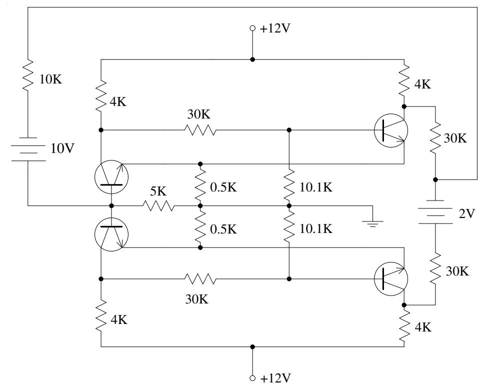

図 2　回 路 例 1

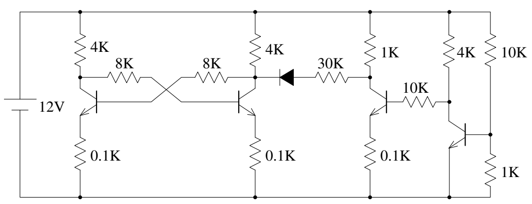

図 3　回 路 例 2

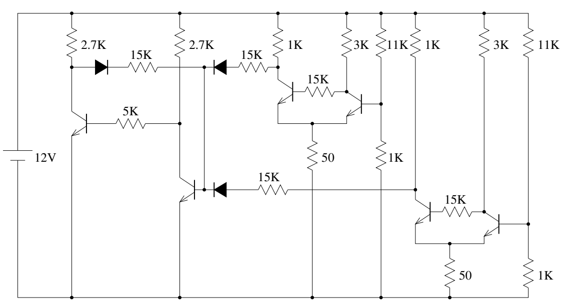

図 4　回 路 例 3

8. 結　　論

本研究では，整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法における定式化手法を提案した．定式化手法を改良することで，実現容易性を維持して計算効率を向上させることができる．提案手法を用いることで，例題 1 のような区分的線形関数を等分割で表現している方程式を

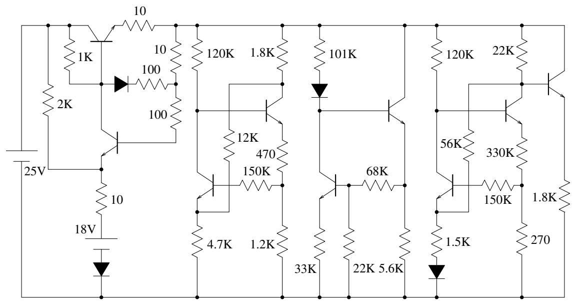

図 5　回 路 例 4

解く場合には，従来の δ フォームよりも計算効率を向上させることができた．

整数計画法を用いた全解探索法では，混合整数計画問題へ定式化する際に用いる定式化手法の特性によって計算効率が変化する．そのため，区分が等分割の場合には提案手法を用いる等，問題の特性を理解したうえで適切な定式化手法を用いることで効率的な解析を行うことができる．

謝辞　本研究を行うにあたり，多大なる御指導を賜わりました山村清隆教授に心より感謝の意を表します．また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します．

文　　献

[1] K. Yamamura and K. Suda,“ An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations, ”BIT-Numerical Mathematics, vol.47, no.3, pp.681-691, Sept. 2007.

[2] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, “LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations, ” Applied Mathematics and Computation, vol.215, no.1, pp.405-413, Sept. 2009.

[3] 田村直也，山村清隆，“整数計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法,” 信学技報, NLP2009-68, CAS2009-32, pp.47-52, Sept. 2009.

[4] 今野　浩，役に立つ一次式. 整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年，日本評論社，2005.

[5] 宮代隆平，松井知己,“ ここまで解ける整数計画，” システム/制御/情報，vol.50,

[6] M. W. Padberg, “Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs,” Operations Research Letters, vol. 27, no. 1, pp.1–5, Aug. 2000.

[7] 田村直也，金子雄輔，山村清隆，“GLPK を用いた区分的線形回路の全解探索法,” 信学技報, NLP2009-144, pp.25-30, Jan. 2010.

[8] H. D. Sherali, “On mixed-integer zero-one representations for separable lower semicontinuous piecewise-linear functions,” Operations Research Letters, vol. 28, no. 4, pp.155–160, May. 2001.

[9] E. M. L. Beale and J. J. H. Forrest, Global Optimization Using Special Ordered Sets, Mathematical Programming, pp.52–69, 1976.

[10] C.H. Huang, “An Effective Linear Approximation Method for Separable Programming Problems, ” Applied Mathematics and Computation, pp.1496–1506, Jul. 2009.