

平行に置かれた2枚のストリップによる平面波の回折：

Wiener-Hopf 法による解析

Wiener-Hopf Analysis of the Plane Wave Diffraction by Two Parallel Strips

電気電子情報通信工学専攻 馬 俊超

Shunchou MA

1. はじめに

レーダ断面積 (Radar Cross Section ; RCS) の研究において対象となっている重要なテーマは、予測、測定、低減の3点である。その中でも、特に多くの興味を集めているのが予測と低減であり、これらに関する理論的基盤は散乱・回折理論である。Wiener-Hopf 法は、散乱・回折問題に対する厳密解法の一つとして知られ[1]-[3]、これまで多くの問題が解析されてきた。

本研究では、RCS において重要な規則形状をして平行におかれた2枚のストリップ(有限長平行平板導波管)を考え、Wiener-Hopf 法を用いて厳密な解析を行う。

この問題については、過去に Jones[4], Williams[5]らが Wiener-Hopf 法による解析結果を発表しているが、本研究では、彼らの解析を見直し、従来になかった新しい高周波漸近解を導出する。なお、以下において時間因子は $e^{-i\omega t}$ とし、全て省略する

2. 問題の定式化

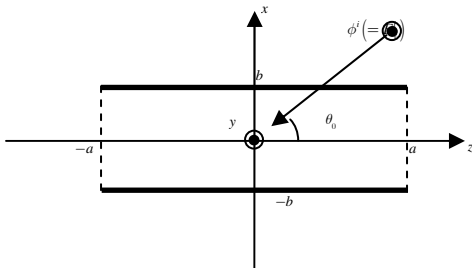


図1. 2枚のストリップ

図1に示すような2枚のストリップによる平面電磁波の回折問題を Wiener-Hopf 法により解析する。y 軸方向に一様で変化がない平板、E 波が入射する場合を取り上げる。

全電界 $\phi(x, z) [= E_x(x, z)]$ を、入射界 $\phi^i(x, z)$ 及び散乱界 $\phi(x, z)$ を用いて次のように定義する。

$$\phi^i(x, z) = \phi^i(x, z) + \phi(x, z). \quad (1)$$

$\phi(x, z)$ の z に関する Fourier 変換を

$$\begin{cases} \Phi(x, \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z) e^{i\alpha z} dz \\ \phi(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha \\ \alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha = \sigma + i\tau \end{cases} \quad (2)$$

により定義すれば、 $\Phi(x, \alpha)$ は帯状領域 $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$ において正則となる。又、便宜上、次の Fourier 積分、

$$\begin{cases} \Phi_{\pm}(x, \alpha) = \pm (2\pi)^{-1/2} \int_{\pm a}^{\pm \infty} \phi_0(x, z) e^{i\alpha(z \mp a)} dz \\ \Phi_1(x, \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a \phi_1(x, z) e^{i\alpha z} dz \end{cases} \quad (3)$$

を導入すると、以後、 $\tau \geq \mp k_2 \cos \theta_0$ で正則な関数、整関数には各々、添字 \pm , 1 をつけてその解析的性質を表すこととする。式(2), (3)より直ちに次式が得られる

$$\Phi(x, \alpha) = e^{i\alpha a} \Phi_{-}(x, \alpha) + \Phi_1(x, \alpha) + e^{i\alpha a} \Phi_{+}(x, \alpha) \quad (4)$$

放射条件によれば、波動方程式の解は以下のように示す。

$$\Phi(x, \alpha) = \begin{cases} \Phi(b, \alpha) e^{-\gamma(x-b)}, & x > b \\ \Phi(b, \alpha) \sinh \gamma(x+b) \sinh^{-1} 2\gamma b \\ -\Phi(-b, \alpha) \sinh \gamma(x-b) \sinh^{-1} 2\gamma b, & |x| < b \\ \Phi(-b, \alpha) e^{\gamma(x+b)}, & x < -b \end{cases} \quad (5)$$

式(5)を用いて若干の計算を行うことにより、 α が帯状領域 $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$ に属するものとして、以下の各式が導かれる。

$$J_1^+(\alpha) = -L^-(\alpha) [e^{-i\alpha a} U_-(\alpha) + e^{i\alpha a} U_+(\alpha)] \quad (6)$$

$$J_1^-(\alpha) = -N^-(\alpha) [e^{-i\alpha a} V_-(\alpha) + e^{i\alpha a} V_+(\alpha)] \quad (7)$$

$$\begin{cases} L(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} \cosh \gamma b \\ N(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} \sinh \gamma b \end{cases} \quad (8)$$

式(6), (7)は連立 Wiener-Hopf 方程式であり、分解操作により解くことができる。なお、式(8)により定義される $K(\alpha), L(\alpha)$ は核関数である。

3. 核関数の分解

核関数 $L(\alpha), N(\alpha)$ は以下に示す積形式に分解できることが知られている。[1][3]

$$\begin{cases} L(\alpha) = L_+(\alpha) L_-(\alpha) = L_+(\alpha) L_-(\alpha) \\ N(\alpha) = N_+(\alpha) N_-(\alpha) = N_+(\alpha) N_-(\alpha) \end{cases} \quad (9)$$

但し、 $C (= 0.57721566\dots)$ を Euler 定数として、式(9)を分解し、無限遠において漸近的振舞を導くことによって、 $L(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} L_+(\alpha) &= (\cos kb)^{1/2} e^{i\pi/4} (k+\alpha)^{-1/2} \\ &\exp\{(iab/\pi)[1-C+\ln(\pi/2kb)+i\pi/2]\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\exp(i\gamma/\pi \ln(\alpha-\gamma)/k) \prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} (1+\alpha/i\gamma_n) e^{2iab/n\pi}$$

となる。核関数 $N(\alpha)$ についても、同様の議論を展開することにより、次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
N_+(\alpha) &= (k^{-1} \sin kb)^{1/2} \exp\{i\alpha b / \pi\} \\
&\cdot [1 - C + \ln(2\pi / kb) + i\pi / 2] \\
&\cdot \exp(ib\gamma / \pi \ln k^{-1}(\alpha - \gamma)) \\
&\cdot \prod_{n=2, \text{even}}^{\infty} (1 + \alpha / i\gamma_n) e^{2iab/n\pi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

以上の解析においては、核関数 $L(\alpha)$, $N(\alpha)$ の因数分解を実行したが、その式中には無限乗積が含まれているため、 kb が大きくなると共に、数値計算の際の収束性が劣化することがわかる。以下の解析においては $kb \gg 1$ の場合に有効となる因数分解の方法を述べることにする。ここで

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L}(\alpha) \\ \tilde{N}(\alpha) \end{aligned} \right\} = 1 \pm e^{-2rb}, G(\alpha) = 2\gamma \tag{12}$$

を導入すれば、次式を得られる。

$$L(\alpha) = \frac{\tilde{L}(\alpha)}{G(\alpha)}, N(\alpha) = \frac{\tilde{N}(\alpha)}{G(\alpha)} \tag{13}$$

正則関数の分解定理[6]により、 $L(\alpha)$ は次のよう示される。

$$\left\{ \begin{aligned} \ln \tilde{L}_+(\alpha) &= (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} \ln[1 \\ &+ \exp(-2\sqrt{\beta^2 - k^2}b)] (\beta - \alpha)^{-1} d\beta \\ \ln \tilde{L}_-(\alpha) &= \ln \tilde{L}_+(-\alpha) \end{aligned} \right. \tag{14}$$

$k_2 \rightarrow +0$ とすれば式(14)は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{L}_+(\alpha) &= (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + \exp(-2\sqrt{\beta^2 - k^2}b) \\
&\cdot (\beta - \alpha)^{-1} d\beta, (\alpha: \text{実数})
\end{aligned} \tag{15}$$

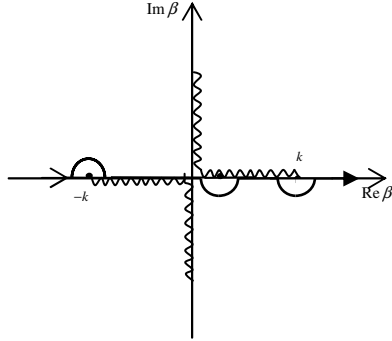


図 2. β -平面における積分路

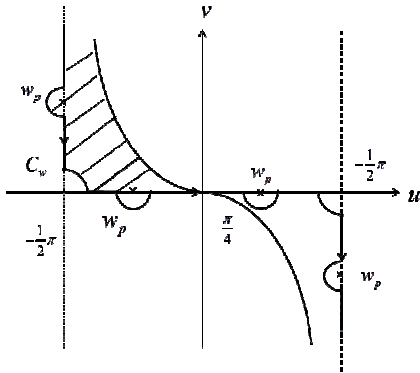


図 3. 式(16)の積分路。

$\beta = k \sin \omega$ により、式(15)は以下のように変形される

$$\begin{aligned}
\ln \tilde{L}_+(\alpha) &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_\omega} \ln(1 + e^{2ikb \cos \omega}) \\
&\cdot (\sin \omega - \alpha / k)^{-1} \cos \alpha d\omega
\end{aligned} \tag{16}$$

式(16)の被積分関数は $\omega = 0$ に鞍部点を持つから、積分路 C_ω を最急勾配路 C_ω^s に変形し、次式が導かれる。

$$\ln \tilde{L}_+(\alpha) = H(-\alpha) (1 + e^{2ikb \cos \omega_p}) + U(\alpha / k, 2kb) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
U(s, q) &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_\omega^s} \ln(1 + e^{iq \cos \omega}) \\
&\cdot (\sin \omega - s)^{-1} \cos \alpha d\omega
\end{aligned} \tag{18}$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & (\xi > 0) \\ 0, & (\xi < 0) \end{cases} \tag{19}$$

一方、関数 $U(s, q)$ は次の性質を持つことが示される。

$$U(+0, q) = 2^{-1} \ln(1 + e^{iq}), U(-0, q) = -2^{-1} \ln(1 + e^{iq}) \tag{20}$$

$\tilde{N}(\alpha)$ は前述と全く同様にして次式が導かれる。

$$\ln \tilde{N}_+(\alpha) = H(-\alpha) (1 - e^{2ikb \cos \omega_p}) + V(\alpha / k, 2kb) \tag{21}$$

但し、

$$V(s, q) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_\omega^s} \ln(1 - e^{iq \cos \omega}) (\sin \omega - s)^{-1} \cos \alpha d\omega \tag{22}$$

関数 $V(s, q)$ は次式を満足する。

$$V(+0, q) = 2^{-1} \ln(1 - e^{iq}), V(-0, q) = -2^{-1} \ln(1 - e^{iq}) \tag{23}$$

式(21)(22)解析接続の原理を用い、両式の成立領域は $\tau > -k_2$ に拡張することができる。

次の変数変換を導入する

$$t = 2^{1/2} e^{i\pi/4} \sin \omega / 2, d\omega = 2^{1/2} e^{i\pi/4} (1 + it^2 / 2)^{-1/2} \tag{24}$$

式(17)(21)は次式のように示される。

$$\left\{ \begin{aligned} U(s, q) &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_t^+} \ln(1 + e^{iq - qt^2}) \psi(s, t) dt \\ V(s, q) &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_t^-} \ln(1 - e^{iq - qt^2}) \psi(s, t) dt \end{aligned} \right. \tag{25}$$

但し、

$$\psi(s, t) = \frac{(1 + it^2)(1 + it^2 / 2)^{-1/2}}{t(1 + it^2 / 2)^{-1/2} - 2^{-1/2} s e^{i\pi/4}} \tag{26}$$

以下においては、 $U(s, q), V(s, q)$ の $q \rightarrow \infty$ における漸近展開を導き、式(25)を以下のように表現しておく。

$$\left\{ \begin{aligned} U(s, q) &= I_1^+(s, q) + I_2^+(s, q) \\ V(s, q) &= I_1^-(s, q) + I_2^-(s, q) \end{aligned} \right. \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{aligned} I_1^\pm(s, q) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\pm\epsilon}^{\epsilon} \ln(1 \pm e^{iq - qt^2}) \psi(s, t) dt \\ I_2^\pm(s, q) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\pm\epsilon}^{\infty} \ln(1 \pm e^{iq - qt^2}) \\ &\cdot [\psi(s, t) - \psi(s, -t)] dt, (0 < \epsilon \leq 1 < 2^{1/2}) \end{aligned} \right. \tag{28}$$

ここで I_1^\pm, I_2^\pm の対数関数を Taylor 級数展開することにより、式(28)は更に、以下のように評価される。

$$\left\{ \begin{aligned} I_1^\pm(s, q) &\sim \pm e^{-i\pi/4} \pi^{-1/2} \operatorname{sgn}(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\mp 1)^{n-1} e^{inq} \\ &\cdot F^*[(nq/2)^{1/2} |s|], (s: \text{実数}, q \rightarrow \infty) \\ I_1^\pm(s, q) &\sim \mp e^{-i\pi/4} \pi^{-1/2} \operatorname{sgn}(is) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\mp 1)^{n-1} e^{inq} \\ &\cdot F^*[(nq/2)^{1/2} |s|], (s: \text{純虚数}, q \rightarrow \infty) \end{aligned} \right. \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
|I_2^\pm(s, q)| &\leq K \int_{\epsilon}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{-nq^2} dt = K \sum_{n=1}^{\infty} (n^{3/2} q^{1/2})^{-1} \int_{(nq)^{1/2} \epsilon}^{\infty} e^{-t^2} dt \\
&\leq K q^{-1/2} \zeta(3/2) \int_{q^{1/2} \epsilon}^{\infty} e^{-t^2} dt \\
&\sim K \zeta\left(\frac{3}{2}\right) e^{-q\epsilon^2} (2q\epsilon)^{-1} = O(e^{-q\epsilon^2}), \quad (q \rightarrow \infty)
\end{aligned} \tag{30}$$

従って、以上の結果を総合すれば、式(27)を用いて $U(s, q), V(s, q)$ の漸近展開は次式のように示される。

$$\begin{cases} U(s, q) \\ V(s, q) \end{cases} \sim \pm \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi^{1/2}} \operatorname{sgn}(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{n-1}}{n} e^{inq} F\left[\left(\frac{nq}{2}\right)^{1/2} \middle| s \right] \tag{31}$$

(s : 実数, $q \rightarrow \infty$)

$$\begin{cases} U(s, q) \\ V(s, q) \end{cases} \sim \frac{e^{i\pi/4}}{(2\pi q)^{1/2} s} S_{\pm}(q), \quad (s: \text{実数}, q \rightarrow \infty) \tag{32}$$

但し、

$$S_{\pm}(q) = \pm \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} (\mp 1)^{n-1} e^{inq} \tag{33}$$

以上の結果により、次式に帰着される

$$\begin{cases} L(\alpha) = L_+(\alpha) L_-(\alpha) \\ N(\alpha) = N_+(\alpha) N_-(\alpha) \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} L_+(\alpha) = 2^{1/2} e^{i\pi/4} (k + \alpha)^{-1/2} \\ \quad \cdot \exp\{H_D(\omega_p)(1 + e^{2ikb \cos \omega_p}) + U(\alpha/k, 2kb)\} \\ N_+(\alpha) = 2^{1/2} e^{i\pi/4} (k + \alpha)^{-1/2} \\ \quad \cdot \exp\{H_D(\omega_p)(1 - e^{2ikb \cos \omega_p}) + V(\alpha/k, 2kb)\} \end{cases} \tag{35}$$

4. 形式解と漸近解

式(6)の両辺に $e^{\pm i\alpha a} L_{\pm}(\alpha)$ を掛け、和形式の分解を施した後、後に解析接続の原理、端点条件、Watson の補助定理、式(6)および Liouville の定理を考慮し、式(7)に含まれる積分の評価を得ることができる

$$\begin{cases} \frac{U_{(+)}^s(\alpha)}{L_+(\alpha)} - (\pi i)^{-1} \int_k^{k+i\infty} e^{2i\beta a} \frac{\gamma L_+(\beta) U_{(+)}^s(\alpha)}{\beta + \alpha} d\beta \\ \quad + \frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{L_-(k \cos \theta_0)(\alpha + k \cos \theta_0)} + \frac{2B \cos(kb \sin \theta_0)}{L_+(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} \\ \quad - \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \frac{e^{-2a\gamma n} L_+(i\gamma n) U_{(+)}^s(i\gamma n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0 \\ \frac{U_{(+)}^d(\alpha)}{L_+(\alpha)} + \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} e^{2i\beta a} \frac{\gamma L_+(\beta) U_{(+)}^d(\alpha)}{\beta + \alpha} d\beta \\ \quad - \frac{2A \cos(kb \sin \theta_0)}{L_-(k \cos \theta_0)(\alpha + k \cos \theta_0)} - \frac{2B \cos(kb \sin \theta_0)}{L_+(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} \\ \quad - \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \frac{e^{-2a\gamma n} L_+(i\gamma n) U_{(+)}^d(i\gamma n)}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} = 0 \end{cases} \tag{36}$$

上式には未知スペクトル関数 $U_{(+)}^{s,d}(\alpha), V_{(+)}^{s,d}(\alpha)$ を被積分関数に持つ無限積分、これらは Wiener-Hopf 方程式(5)の形式解に過ぎない。従って、無限積分を近似的に評価したうえで未知数を数値的に決定する必要があるが、小林らが論文で確立した手法を適用すれば、この操作を実行することができる。なお、近似解の導出の詳細については、紙面の制約上、記述を省略する。連立 Wiener-Hopf 方程式(6)(7)に分解操作を行うことにより、未知スペクトル関数の満たす積分方程式を導出した。端点条件を用いると、式(36)の近似表現は、

$$\begin{cases} \frac{U_{(+)}(\alpha)}{b} \sim \frac{L_+(\alpha)}{b^{1/2}} \left[\frac{a_1 p_1}{2} (u_1^s - u_1^d) \xi(\alpha) \right. \\ \quad \left. + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{a_n p_n}{2} \frac{u_n^s + u_n^d}{b(\alpha + i\gamma_{2n-3})} - \frac{K_u^s + K_u^d}{2} S_N^u(\alpha) - \frac{B_0^u}{b(\alpha - k \cos \theta_0)} \right] \\ \frac{U_-(\alpha)}{b} \sim \frac{L_-(\alpha)}{b^{1/2}} \left[\frac{a_1 p_1}{2} (u_1^s + u_1^d) \xi(-\alpha) \right. \\ \quad \left. - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{a_n p_n}{2} \frac{u_n^s - u_n^d}{b(\alpha - i\gamma_{2n-3})} - \frac{K_u^s - K_u^d}{2} S_N^u(\alpha) - \frac{A_0^u}{b(\alpha - k \cos \theta_0)} \right] \\ |k| a, N \rightarrow \infty, \theta_0 \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$

となることが分かる。但し、

$$\begin{cases} a_1 = kb, p_1 = b^{-1/2} L_+(k) \\ a_n = \frac{[(2n-3)\pi]^2}{4bi\gamma_{2n-3}}, p_n = b^{-1/2} L_+(i\gamma_{2n-3}) \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} u_n^{s,d} = b^{-1} U_{(+)}^{s,d}(i\gamma_{2n-3}) \\ S_N^u(\alpha) = \pi^{1/2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^{-2a\gamma_{2n-3}} (2n-3)^{-1}}{(2n-3)\pi - i\alpha b} \\ A_0^u = \frac{2b^{1/2} A \cos(kb \sin \theta_0)}{L_-(k \cos \theta_0)} \\ B_0^u = \frac{2b^{1/2} B \cos(kb \sin \theta_0)}{L_+(k \cos \theta_0)} \end{cases} \tag{39}$$

又、式(7)についても同様の積分評価を行い、式(5)の完全な高周波漸近表現が得られる。以上において得られた式は、任意の入射角 θ_0 、観測角 θ について一様に有効である。

5. 導波管外部の散乱遠方界

実空間における散乱界は、次の Fourier 逆変換

$$\phi(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \Phi(x, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad |c| < k_2 \cos \theta_0 \tag{40}$$

を評価することによって導かれる。

$$\phi^t \sim \phi_1 + \phi_2, \quad k\rho_{1,2} \rightarrow \infty \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= e^{-ik(\pm b \sin \theta_0 + \alpha \cos \theta_0)} \left[e^{-ik\rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_0)} \right. \\ &\quad \cdot \widehat{F}\{-\sqrt{2k\rho_1} \cos 2^{-1}(\theta_1 - \theta_0)\} - e^{-ik\rho_1 \cos(\theta_1 + \theta_0)} \\ &\quad \cdot \widehat{F}\{\sqrt{2k\rho_1} \cos 2^{-1}(\theta_1 + \theta_0)\} \mp e^{-ik(\pm b \sin \theta_0 - \alpha \cos \theta_0)} \\ &\quad \cdot \left[e^{-ik\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_0)} \widehat{F}\{-\sqrt{2k\rho_2} \cos(\theta_2 - \theta_0)/2\} \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-ik\rho_2 \cos(\theta_2 + \theta_0)} \widehat{F}\{\sqrt{2k\rho_2} \cos 2^{-1}(\theta_2 + \theta_0)\} \right] \right], \quad x \gtrless \pm b \tag{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \pm \left[2^{-1} \{U_{(+)}(-k \cos \theta_1) \pm V_{(+)}(-k \cos \theta_1)\} \right. \\ &\quad \left. - \Phi_1^{s,d}(-k \cos \theta_1) \right] \cdot k \sin \theta_1 (k\rho_1)^{-1/2} e^{i(k\rho_1 - \pi/4)} \\ &\quad + \left[2^{-1} \{U_{-}(-k \cos \theta_2) \pm V_{-}(-k \cos \theta_2)\} \right. \\ &\quad \left. - \Phi_2^{s,d}(-k \cos \theta_2) \right] \cdot k \sin \theta_2 (k\rho_2)^{-1/2} e^{i(k\rho_2 - \pi/4)}, \quad x \gtrless \pm b
\end{aligned}$$

式(41)(42)に従って $ka \gg 1, kb \ll 1$ の場合には、 ϕ_2 を無視しても、散乱界の特性を把握することができる。

6. 散乱遠方界の高周波漸近表現

本節においては、 $ka, kb \gg 1$ の場合に有効となる界表現を導くことができる。定数 A, B の定義式を考慮すれば、 $\Phi(\pm b, \alpha)$ は次のように表すことができる。

$$\Phi(\pm b, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} [e^{i\alpha a} \psi_n^+(\pm b, \alpha) + e^{-i\alpha a} \psi_n^-(\pm b, \alpha)] \quad (43)$$

式(43)により、散乱界 ϕ の積分表示は以下のよう示す。

$$\phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n^+(x, z) - \psi_n^-(x, z)] \quad (44)$$

但し、

$$\begin{cases} \psi_n^+ = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^+(\pm b, \alpha) e^{\mp \gamma(x \mp b) - i\alpha(z - a)} d\alpha \\ \psi_n^- = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^-(\pm b, \alpha) e^{\mp \gamma(x \mp b) - i\alpha(z + a)} d\alpha \\ x \geq \pm b \end{cases} \quad (45)$$

ここで、極座標

$$x = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \quad -\pi < \theta < \pi \quad (46)$$

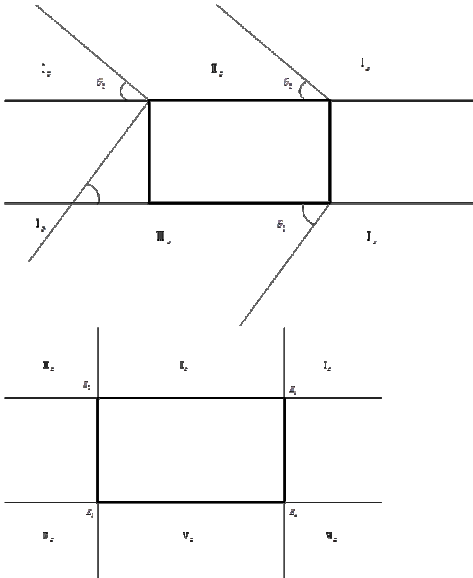


図 4. 遠方界の幾光学的解釈のための領域分割

を導入すれば、散乱界の $k\rho \rightarrow \infty$ における漸近表現が以下のよう得られる。

$$\psi_1^+ \sim \begin{cases} -\phi^i + \phi_{1,2}^+ + \tilde{\phi}_{1,2}^+, & -\pi < \theta_2^+ < -\pi + \theta_0 \\ \phi_{1,2}^+ + \tilde{\phi}_{1,2}^+, & -\pi + \theta_0 < \theta_2^+ < -\pi/2 \\ \phi_{11}^+ + \phi_{12}^+ + \tilde{\phi}_{11}^+ + \tilde{\phi}_{12}^+, & 0 < \theta_1^+ < \pi/2, \quad -\pi/2 < \theta_2^+ < 0 \\ \phi_{11}^+ + \tilde{\phi}_{11}^+, & \pi/2 < \theta_1^+ < \pi - \theta_0 \\ -\phi^r + \phi_{11}^+ + \tilde{\phi}_{11}^+, & \pi - \theta_0 < \theta_1^+ < \pi \end{cases} \quad (47)$$

$$\psi_1^- \sim \begin{cases} \phi_{11}^- + \tilde{\phi}_{11}^-, & 0 < \theta_1^- < \pi/2 \\ \phi_{11}^- + \tilde{\phi}_{11}^- + \tilde{\phi}_{12}^-, & \pi/2 < \theta_1^- < \pi - \theta_0 \\ \phi^r + \phi_{11}^- + \tilde{\phi}_{11}^- + \tilde{\phi}_{12}^-, & \pi - \theta_0 < \theta_1^- < \pi \\ \phi^i + \phi_{11}^- + \tilde{\phi}_{11}^- + \tilde{\phi}_{12}^-, & x < -b, \pi < \theta_1^- < \pi + \theta_0 \\ \phi_{11}^- + \tilde{\phi}_{11}^- + \tilde{\phi}_{12}^-, & x < -b, \pi + \theta_0 < \theta_1^- < 3\pi/2 \\ \tilde{\phi}_{12}^-, & 3\pi/2 < \theta_2^- < 2\pi \end{cases} \quad (48)$$

但し、

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{11}^+(\rho_2^+, \theta_2^+) = \Psi^e(\rho_2^+, \theta_2^+) e^{i\pi/4} (4\pi kb)^{-1/2} (\cos^{-1} \theta_1^+ + \cos^{-1} \theta_0) \\ \cdot \left[\phi^i(b, a) \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-3/2} e^{i(2n)2kb} - \phi^i(-b, a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-3/2} e^{i(2n+1)2kb} \right] \\ \tilde{\phi}_{12}^+(\rho_1^+, \theta_1^+) = \Psi^e(\rho_1^+, \theta_1^+) e^{i\pi/4} (4\pi kb)^{-1/2} (\cos^{-1} \theta_2^+ + \cos^{-1} \theta_0) \\ \cdot \left[\phi^i(-b, a) \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-3/2} e^{i(2n)2kb} - \phi^i(b, a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-3/2} e^{i(2n+1)2kb} \right] \\ \tilde{\phi}_{11}^-(\rho_1^+, \theta_1^+) = \Psi^e(\rho_1^+, \theta_1^+) e^{i\pi/4} (4\pi kb)^{-1/2} (\cos^{-1} \theta_1^+ + \cos^{-1} \theta_0) \\ \cdot \left[\phi^i(b, a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n)^{-3/2} e^{i(2n)2kb} - \phi^i(-b, a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-3/2} e^{i(2n+1)2kb} \right] \\ \tilde{\phi}_{12}^-(\rho_2^+, \theta_2^+) = \Psi^e(\rho_2^+, \theta_2^+) e^{i\pi/4} (4\pi kb)^{-1/2} (\cos^{-1} \theta_2^+ + \cos^{-1} \theta_0) \\ \cdot \left[\phi^i(-b, a) \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-3/2} e^{i(2n)2kb} - \phi^i(b, a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-3/2} e^{i(2n+1)2kb} \right] \end{cases} \quad (49)$$

前述と全く同様にして、 $\psi_2^\pm(x, z), \psi_3^\pm(x, z)$ の漸近表現を得ることができる。

7. むすび

本研究においては、平行に置かれた2枚のストリップによる平面波の回折問題を Wiener-Hopf 法により厳密に解析した。その際 Wiener-Hopf 中に現れる核関数の因数分解を二つの手法により実行し、その表式を用いて遠方界を決定した。又、得られた解に高周波漸近展開を施すことにより、幾光学的解釈のしやすい形式に変換した。本研究で適用した核関数 $L(\alpha), N(\alpha)$ の因数分解の方法は高周波漸近展開のかたちで表すことができるため、 kb が大きくなると共に収束性が良くなることわかる。

謝辞

本研究にあたりご指導頂いた本大学の小林一哉教授に深く感謝致します。また、研究の実施にあたりご協力を頂いた小林研究室の大学院生各位に感謝致します。

文献

- [1] Nobel, B., Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations, Pergamon Press, London, 1958.
- [2] Weinstein (Vajnshtejn), L.A., The Theory of Diffraction and the Factorization Method (Generalized Wiener-Hopf Technique), trans. By P. Beckmann, Golem Press, Boulder: 1969
- [3] Mittra, R., and S.W. Lee, Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan Company, New York: 1971
- [4] Jones, D.S., "Diffraction by a Wave-Guide of Finite Length," Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 48, Part 1, Jan. 1952, pp. 118-134.
- [5] W.E. Williams, "Diffraction by Two Parallel Planes of Finite Length," Proc. Camb. Phil. Soc. 50, 1954, 309-381.
- [6] K. Kobayashi, "The Wiener-Hopf and Modified Residue Calculus Techniques" in Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems, ed. by E. Yamashita, Artech House Boston Publishing, London, 1990, pp. 245-301.