

## A comparative study of methods to attenuate the numerical fluctuations in MPS (Moving Particle Semi-implicit) method

### 1. はじめに

自由表面の大変形を伴う流体運動の直接的な数値計算法として粒子法は近年開発が進んできた。粒子法は格子法と違い境界格子を設定する必要がないことより、津波の陸地構造物への作用など境界が複雑な場合の流体計算に対して有効であることが一般的な認識とされている。

MPS(Moving Particle Semi-implicit)粒子法は、越塚ら<sup>1)</sup>により開発された自由表面を伴う非圧縮性流れを解析するためのラグランジュ的な数値解析手法であり、構造解析にも広く応用されている。しかし、MPS法から得られる圧力値は、不自然な振動があることが知られている。

MPS粒子法における数値擾乱低減の初期の試みとしては、越塚ら<sup>1)</sup>による限られる圧縮性を考慮し、計算を安定化させる修正法や、後藤ら<sup>2)</sup>による粒子密度の高次微分演算に基づく圧力Poisson方程式の高精度生成項を用いたHigher order source term修正法などが提案されている。これらの手法によって、標準MPS法に見られる圧力の物理的擾乱を効果的に抑制できることが明らかになっている。

しかし、これらの手法もそれぞれ限界があり、MPSにおける数値擾乱を完全に消すことができない。その根本的な原因は、従来のMPS法の空間微分モデルでは、粒子が正方形格子状に整然と配置されていることを前提として導出されるため、境界部分や粒子の配置が乱雑の場合では計算の精度が低下すると考えられる。

それに対し、玉井ら<sup>3)</sup>はTaylor展開を用い、粒子の配置を考慮できる高次精度化微分モデルを提案し、ある任意スカラー関数の微分を求める時に、粒子の配置が乱雑の場合においても誤差は非常に小さいことを示している。しかし、この微分モデルを用いて、非圧縮流れ解析アルゴリズムへの適用性についてはまだ検証されていない。

以上の点を踏まえ、本研究は今までの数値擾乱を低減させる改良法を検証し、数値擾乱の根本的な原因は微分モデルが粒子の配置を正しく考慮できるかどうかであることを明らかにした。また、粒子の配置が乱雑の場合においても数値擾乱が起きないTaylor展開を用いた高次精度化微分モデルの非圧縮流れ解析への適用性について検証した。

### 2. MPS 粒子法

MPS粒子法が扱う非圧縮性流れの支配方程式は、次の連続式とNavier-Stokes方程式である。

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\bar{u} + \bar{F} \quad (2)$$

ここに、 $\rho, t, \bar{u}, P, \nu, \bar{F}$ はそれぞれ、密度、時間、速度ベクトル、圧力、動粘性係数、外力ベクトルである。支配方程式に現れる勾配や発散、Laplacianなどの空間微分項を以下の微分モデルで離散化を行う。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ w(|\bar{r}_{ij}|) \frac{\bar{r}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \frac{\phi_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \right] \quad (3)$$

$$\langle \nabla \cdot \bar{u} \rangle = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[ w(|\bar{r}_{ij}|) \frac{\bar{r}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \cdot \frac{\bar{u}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \right] \quad (4)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} \left[ w(|\bar{r}_{ij}|) \phi_{ij} \right] \quad (5)$$

ここに、 $d, i, j, \bar{r}_{ij}, \phi_{ij}, \bar{u}_{ij}, w(|\bar{r}|)$ はそれぞれ次元数、任意粒子 $i$ 、粒子 $i$ に影響を及ぼす粒子 $j$ 、粒子 $i, j$ 間の相対位置ベクトル、スカラー量の差分、ベクトル量の差分、重み関数である。

MPS法の半陰的な解法(Semi-implicit)は、外力項と粘性項を陽的に計算し、それらの計算が終了した時点での粒子の関数値(以下、陽的な計算終了段階の関数値は上方に記号 $*$ を付すことにより表す)を用いて、次の圧力Poisson方程式

$$\nabla^2 P^{k+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n^* - n^0}{n^0} \quad (6)$$

を陰的に解き、ここで得られた圧力を用いて圧力勾配項により粒子に修正加速度を与え、非圧縮条件を課す計算手法である。

### 3. 数値擾乱の問題

標準MPS法の問題点を指摘する1例として静水圧の再現性を示す、1.0m×1.0mのタンクを想定し、静水圧シミュレーションを行った。その結果、図-1に示すとおりタンク中央の底面における圧力(底面壁を構成する粒子の圧力値)が振動していることを確認した。

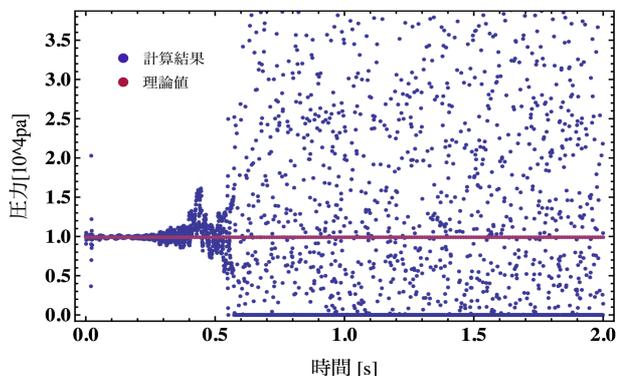


図-1 静水圧シミュレーション

#### 4. 従来の修正手法及びその問題点

粒子法における数値振動の抑制と計算の安定化については、過去に様々な提案がなされている。

##### 4-1. 数値的な補正

MPS法においては通常、粒子が接近し過ぎに起因する不安定性を回避するために、粒子の間に反発力を与える修正が用いられている。また、圧力がマイナスになる場合、ゼロに置き換える。これらの修正は物理的に厳密ではないが、数値安定性を向上させるための数値的な処理である。

##### 4-2. MPS-WC法

MPS法は、非圧縮性流体を対象にする解析手法であるが、計算を安定化させるには限られた圧縮性を考慮することが有効であることが指摘されている(MPS-WC法)。そして、越塚ら<sup>1)</sup>は、限られた圧縮性を導入し、圧力Poisson方程式を次のように与えている。

$$\nabla^2 P^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \left( \frac{n^* - n^0}{n^0} - \alpha P_i^{n+1} \right) \quad (7)$$

ここで、 $\alpha$ は圧縮率を表している。この修正手法は、図-2に示すように、圧力擾乱の幅が標準MPSにより大分良くなってきたが、周期的な振動が発生している。しかし、圧縮率 $\alpha$ が小さいほど、圧力の周期的な振動が小さくなるが、ある臨界値を超えると、計算結果が非圧縮性流体のようになり、標準MPS法と同様な数値擾乱が発生する。

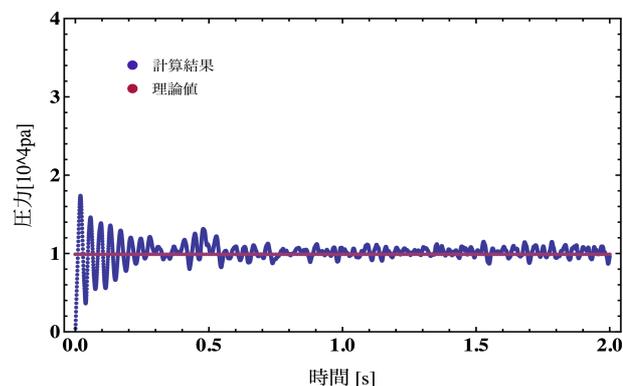


図-2 MPS-WC法

#### 4-3. MPS-HS法

標準MPS法の圧力Poisson方程式のsource項(圧力Poisson方程式の右辺)は次の式で表す。

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{n^0 - n_i^*}{\Delta t} \quad (8)$$

陰的な計算は行列の収束誤差を伴うので、陰的な計算後も流体の密度は厳密に計算初期の密度 $n^0$ には戻れない。それは、数値擾乱が発生する原因の一つと考えられる。よって、後藤らは以下の高精度化source項を提案した。

$$\frac{Dn}{Dt} = -\sum_{i \neq j} \frac{r_e}{r_{ij}^3} (x_{ij} u_{ij}^* + y_{ij} v_{ij}^*) \quad (9)$$

ここに $x_{ij}, y_{ij}$ は粒子 $j$ の粒子 $i$ に対する相対座標、 $u_{ij}, v_{ij}$ は粒子 $j$ の粒子 $i$ に対する相対速度。 $r_e$ は影響半径である。 $r_{ij} < r_e$ の場合では、 $j$ 粒子と $i$ 粒子の間に相互作用があると仮定している。

MPS-HS法の計算結果は、図-3に示すように、標準MPS法のような不規則な数値擾乱が発生しているが、振動の幅は標準MPS法より小さい。

一方、限られた圧縮性を考慮する修正法と比較すれば、MPS-HS法の計算結果は数値擾乱の幅は大きいですが、周期的な振動は発生しない。

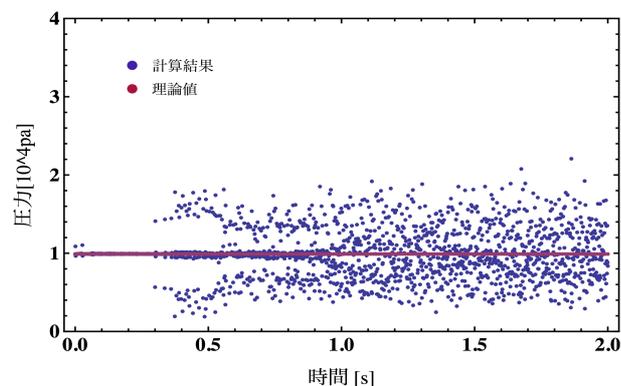


図-3 MPS-HS法

#### 4-4. MPS-WC-HS法

4-2節、4-3節では、それぞれの視点から、数値擾乱を修正している。この二つの修正方法は同時に使うことも可能である。

両手法を同時に用いたMPS-WC-HS法での計算結果は、図-4に示すように、数値擾乱の幅が非常に小さくなっている。しかし、時間が進むにつれ、計算値の圧力は理論値と離れていくことが分かる。

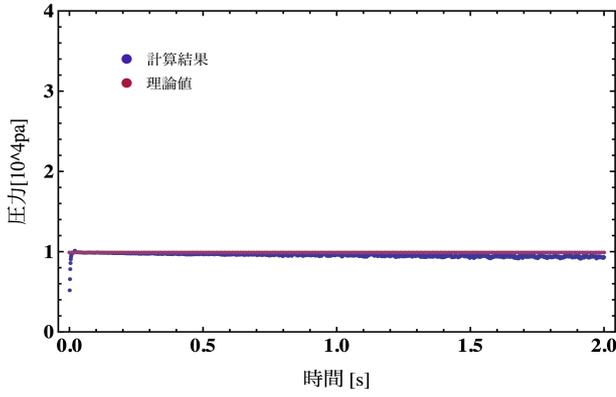


図-4 MPS-WC-HS 法

## 5. Taylor 展開を用いた高次精度 MPS 法

前章に示した数値擾乱の修正手法では、ある程度数値擾乱を低減させる効果はあるが、十分ではなくそれぞれの問題もある。MPS 法における数値擾乱が発生する原因は様々あるが、根本的な原因としては、式(3), (4), (5)の微分モデルは粒子が正方形格子状に配置されていることを前提として導出されていることにある。そのため、MPS 法における微分モデルを変えずに、数値擾乱を完全に消すことは不可能といえる。

粒子配置を考慮する一階微分モデルとして、鈴木らにより、(10)式に示す勾配モデルを提案している。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \left[ \frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} w(\bar{r}_{ij}) \frac{\bar{r}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \otimes \frac{\bar{r}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} w(\bar{r}_{ij}) \frac{\bar{r}_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \otimes \frac{\phi_{ij}}{|\bar{r}_{ij}|} \right] \quad (10)$$

このモデルは、入部ら<sup>4)</sup>により非圧縮流れの解析に適用され、境界近傍でも精度を保ち、標準MPS法の微分モデルより精度が向上することが示されている。また、玉井ら<sup>3)</sup>はTaylor展開を用いてこのモデルを一般化している。

$$\bar{\delta}_i = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \dots \right) \Big|_{\bar{r} = \bar{r}_i} \quad (11)$$

$$\bar{P}_{ij} = \left( \Delta x, \Delta y, \frac{1}{2}(\Delta x)^2, (\Delta x \Delta y), \frac{1}{2}(\Delta y)^2, \dots \right) \quad (12)$$

$$\bar{\delta}_i = \left[ \sum_j (\bar{P}_{ij} \otimes \bar{P}_{ij}) w(\bar{r}_{ij}) \right]^{-1} \left[ \sum_j \bar{P}_{ij} \otimes \phi_{ij} w(\bar{r}_{ij}) \right] \quad (13)$$

これらの高次精度微分モデルは標準 MPS 法のように、勾配モデル、発散モデル、Laplacian モデルなどの各空間微分作用要素に対応するモデルを個別に定義しない。したがって、離散化を行う際には、ベクトル  $\bar{\delta}_i$  の値の中から、勾配、発散、Laplacian などの計算に必要な成分の値をそれぞれ抽出し用いる。

## 6. 高次精度微分モデルの検証

前章に示した Taylor 展開を用いた高次精度微分モデルを用いて、図-5 に示すとおりある目的関数の一階微分を粒子の配置が正方形格子状とランダム状とした場合の数値計算を行った。その結果を従来の標準 MPS 法微分モデルから得られた結果と比較する。また、高次精度微分モデルを用いて、静水圧シミュレーションを行い、モデルの精度を評価する。

### 6-1. 一階微分の検証

検証する目的関数は次の関数とする。

$$\phi(x, y) = -\sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{5} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

$$x, y \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\pi}{5} \cos\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{5} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (15)$$

図-6 に計算結果を示す。図-6 (a) に示すとおり、標準 MPS 微分モデルの結果は左図の規則配置の場合、微分値は理論値と基本的に同じことが分かる。しかし、右図の不規則配置の場合、微分値は理論値と大きく異なることが確認できた。そのため、この原因は、全ての粒子が格子状に配置されていないことによるといえる。

一方、図-6 (b) に示す高次精度微分モデルの結果は、規則配置及び不規則配置の場合においても、計算領域内のすべての粒子で微分値は理論値に非常に近い値を示している。この結果は、粒子の配置に対する仮定を導入しなかったことにあることは明らかであり、高次精度微分モデルが任意粒子配置の勾配計算を行うのに有用な手法であることを示している。

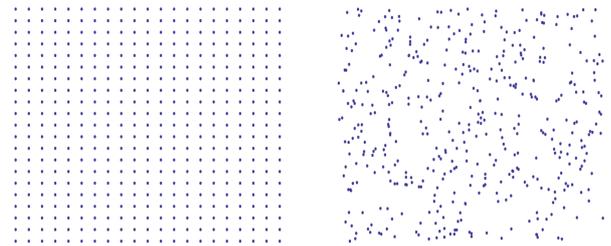
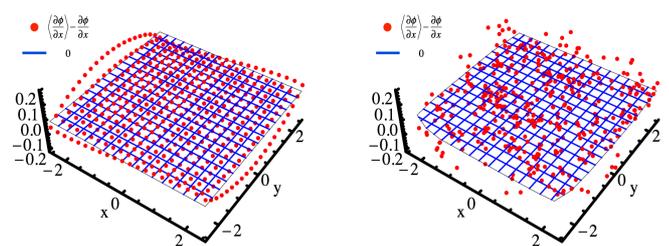
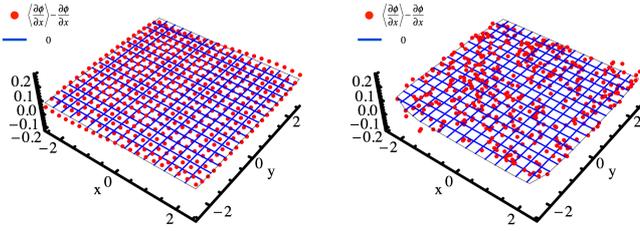


図-5 精度検証に使用した粒子の配置



(a) 標準MPS微分モデル



(b) 高次精度微分モデル  
図-6 一階微分の検証

## 6-2. 静水圧シミュレーション

玉井らはTaylor展開を用いて高次精度微分モデルを提案したが, 非圧縮流れ解析アルゴリズムへの適用性について, 境界に全ての粒子の圧力が0のディリクレ条件を与える場合しか検証を行ってない. そのため, 本研究では静水圧シミュレーションを行って, 壁がある場合の適用性を検討する.

圧力Poisson方程式のソース項は, 陽的な計算が終わる時点の速度の発散を用いるものとする.

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t^2} \nabla \bar{u}^* \quad (16)$$

壁境界においては, 標準 MPS 法と同様に, 壁面で圧力勾配ゼロのノイマン境界条件を設定する. 自由表面においては, 圧力がゼロのディリクレ条件を与える. また, この計算ケースでは, 4-1 に述べた粒子の接近に起因する不安定性を修正する手法や, 負圧をゼロにする修正法などを一切用いないものとする.

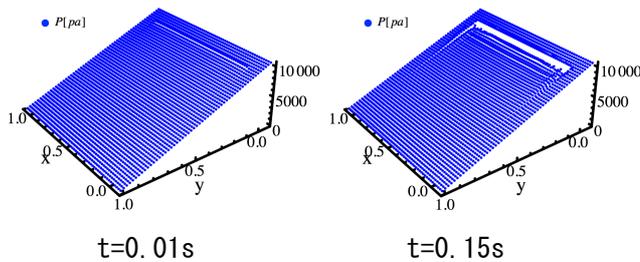


図-7 高次精度微分モデルを用いた静水圧計算結果

図-7 に静水圧シミュレーションの計算結果を示す. タンクの上部では, きれいな静水圧分布が見えるが, 時間が発展するとともに, 底面粒子の分布や圧力値などに乱れが生じる. その原因は, 標準 MPS 法の壁境界は壁面で圧力勾配ゼロのノイマン境界条件を与えていることによると考えられる. しかし静水圧の場合では, 底面の圧力勾配をゼロでなく,  $-\rho g$  である. それに対する解決策は, 次章に説明する.

## 7. 一般的な壁ノイマン条件を用いた静水圧シミュレーション

前章で明らかにした壁境界の問題を解決するために本研究では, 一般的な壁ノイマン条件を提案し, その効果を検証した.

標準 MPS 法の壁境界に壁粒子を固定し, 速度や位置などは計算を通して常に変わらない. 本研究ではそれと違い, 陽的な計算時に壁粒子を移動させ, 得られた速度を以下の式を用いて, 圧力ポアソ方程式のノイマン条件として扱う.

$$\bar{u}_i^* = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla P_i^{n+1} \quad (17)$$

ここで,  $i$  は粒子のうち壁粒子のみを表す. 陰的に解いた圧力では, 必ず式(17)を満たすため, 壁粒子は陰的な計算によって, 速度や位置などは計算初期に戻る.

本研究が提案した一般的なノイマン条件を用いた静水圧シミュレーション結果は, 図 8 に示すように, 理論値と一致する上で, なお且つ時間が進行しても, 擾乱せず安定している.

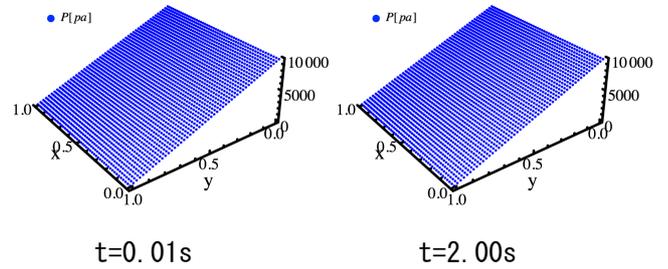


図-8 高次精度微分モデルと一般化ノイマン条件を用いた計算結果

## 8. 結論

本研究では, これまでの MPS における数値擾乱を低減させる改良法を検証した. その結果, 既存の改良法では数値擾乱を根本的に解決できないことを確認した.

更に, 粒子の配置を正しく考慮できる Taylor 展開を用いた高次精度微分モデルを検証した. 粒子配置が乱雑の場合, 新たな微分モデルは標準 MPS の微分モデルより精度良いことが分かった.

最後に, 新たな微分モデルを非圧縮流れ解析へ適用するための MPS 粒子法における一般化的な壁ノイマン条件の与える方法を提案し, 静水圧シミュレーションを行った. その結果, 静水圧の場合における数値擾乱が完全に消えた.

## 9. 参考文献

- 1) 越塚誠一(2005): 粒子法, 丸善株式会社
- 2) Khayyer Abbas, 後藤仁志: 粒子法における圧力擾乱低減のためのCMPS-HS法の提案, 海岸工学論文集, 第55巻, pp.16-20, 2008.
- 3) 玉井佑, 柴田和也, 越塚誠一: Taylor 展開を用いた高次精度 MPS 法の開発, Transactions of JSCES, Paper No.20130003, 2013.
- 4) 入部綱清, 仲座栄三: MPS法における勾配計算の高精度化とその応用, 土木学会論文, 66, pp.46-55, 2010.