機会均等社会における富の偏在と適性化に関する確率過程モデル
──パレートの法則の再考──

佐　野　健　一
友　知　政　樹
河　野　光　雄

A Stochastic Model for Uneven Distribution of Wealth and Its Appropriation in an Equal-Opportunity Society: Pareto Principle Revisited

Ken-ichi SANO
Masaki TOMOCHI
Mitsuo KONO

Abstract

The world wealth distribution has been shown skewed. This has been known as the Pareto Rule which tells us that the 80% of the total wealth is occupied by the 20% of the total population. There are some factors behind the situation that the rich gets richer. In this paper we model an equal-opportunity society where individuals may earn their return based on how much they invested or lose their investment with an equal probability for everyone. Even though these individuals are guaranteed equal opportunity to get richer or poorer, we show that the wealth distribution in our model becomes uneven over time. We also show that the uneven wealth distribution does not imply that the rich stays rich forever, that is, pride goes before a fall. Moreover, we have examined appropriation for the uneven wealth distribution by introducing taxation into our model.

Key Words
Pareto Rule, Power Law, Stochastic Process, Gini's Coefficient, Lorenz Curve.

目　　次

1. はじめに

社会の富の区分分布はべき則で表現されることが古くから知られており，パレートの法則，あるいは 80：20 の法則と呼ばれてきたものである．区分分布は，富の大きい順に人々を並べ，人口を 10 等分して区分ごとの富の合計を区分番号に対してプロットしたもので，これがべき則で表されるというものである．べき則は似たような構造がスケールを変えて自身のパターンの中に埋め込まれるときに現れ，この自己相似性はランダムパターンの特徴であり，Zipf 則はべき則の一種である．

Davies et al（2008）は世界といくつかの地域における富の区分分布を求めているが，世界の富の区分分布は図 1 のようになる．これから明らかに世界の富の 80 パーセントが第 1 区分にある 10 パーセントの人々に占められていることが分かる．Pareto は象徴的に社会の富の 80 パーセントは 20 パーセントの人々によって占められることを 80：20 の法則と表現して，富の偏在を指摘したが，今日の富の偏在は一層進んだことになる．

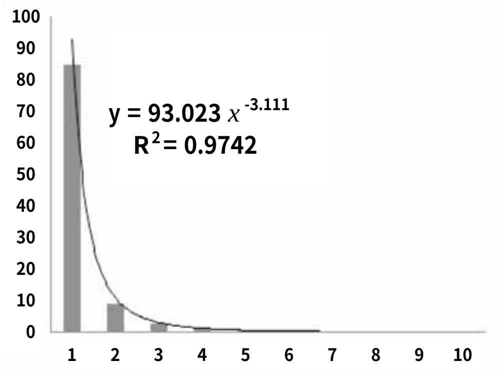

図1　世界の富の区分分布

通常表現されるような富に対する人口分布は，平均値に関して対称性が破れて，大きな富を持つ人口が尾を引く歪んだ分布になっている．よくいわれるように，もし富に対する人口分布が正規分布であれば，富の区分分布はべき則にはならず，線形となる．正規分布は，ホワイトノイズで特徴づけられる事象に対して観測されるが，単純な確率過程でも富の偏在が起こることを示すのがこの論文の主題である．

富の偏在はどの社会にも観察され，社会における格差の度合いの違いはべき則の指数の違いとして表わされることになる．同じく Davies et al のデータから求めた世界の各地域における富の区分分布（べき則）の指数を表 1 に与えた．同じ表の最後に厚生労働省平成 21 年度国民生活基礎調査の概況から求めた日本の区分所得分布（べき則）の指数を載せた．

表 1：世界／地域の富の区分分布の指数

地　域	指　数
北米	-1.996
ヨーロッパ	-0.727
東アジア	-2.727
世界	-3.111
日本	-1.092

分布の構造を問題にする立場は，個を捨象することになるので，富裕層がいつまでも富裕層にとどまれることを意味しない．確かに「金持ちはますます金持ちになる」と言えるケースもあれば，富裕層が貧困層に転落したり，貧困層が富裕層の仲間入りをするケースもあり、個別には「盛者必衰の理」が貫いている．このことは，機会の平等と結果の平等は時間無限大で実現している可能性を示唆しているともいえる．個人の人生においては時間無限大は意味を持たないので，機会の平等と結果の平等は乖離したものとして立ち現われる．有限時間を生きている個人の幸不幸は確率を超えることはできないとしても，連綿として続く家系の営みは確率的に浮き沈みを平等に受けることとなり，数世代にわたれば機会の平等と結果の平等は担保されていることになる．

ひとつの世代において極端な富の偏在は社会の不安定化要因である一方で，極端な一様化も社会から活力を奪うと考えられる．そのため，適切な

配分に落ち着くような政策を立てることが求められる．自由競争という政策選択は，世代内での機会均等を重視し，ある程度の富の偏在は認める立場といえる．政策立案の立場からは，発生した偏在が平等な機会の下に生じ得るのか，またそれが社会の安定性を揺るがすものなのかを知る必要がある．

市場経済は機会の平等を担保し，結果は個人の努力にゆだねるという議論が広く受け入れられている状況から，ここでは確率的に巡ってくる機会が結果に直結するような経済活動を考えて，富の分布がどのように表現されるのか，「盛者必衰の理」は観測されるのか，富の分布と個人の富の変動を調べることにする．また富の分布の均衡状態は有限時間で実現するのかどうかも検証する．極端な富の偏在を避けるための諸制度として，税制がその代表例として挙げられるが，本稿において，富の偏在化を緩和もしくは是正するメカニズムとしての税制度の導入の効果も併せて検討する．

2. 確率過程における富の偏在モデル

n 人からなる社会を考える．初期に完全平等で，すべてが同額の資産 m_0 を持っているとする．個人は毎期，資産の一部を投資し，その期のうちにある確率で投資額に依存したリターンを受ける（勝ち）か，投資額すべてを失う（負け）とする．今 t 期の個人 i の資産を$m(i,t)$とし，投資率を$q(i,t)$とし，リターンを得る確率を$p(i,t)$とする．個人 i の各期での投資の勝ち負けを$s(i,t)$で表わすことにし，勝ちを$s(i,t)=1$，負けを$s(i,t)=-1$で表わすことにする．$s(i,t)$の値は一様乱数を振って決めることとする．投資率が t の関数であるのは，個人の戦略を考慮する場合を含めるためである．

このとき t 期における投資総額は

$$\sum_{i=1}^{n} q(i,t)\,m(i,t) = M(t),$$

で表わされ，勝者の投資総額$W(t)$と敗者の投資総額$L(t)$はそれぞれ

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1+s(i,t)}{2}\, q(i,t)\, m(i,t),$$

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-s(i,t)}{2}\, q(i,t)\, m(i,t),$$

で表わされる．

2.1　相互作用のない系

まず，確率過程における富の偏在化の機構を理解するため，系を構成する人々が相互作用しないもっとも簡単なケースを考える．勝者は自分の投資額の 2 倍のリターンを得，敗者は投資額を失うとする．このとき個人iの$t+1$期の資産$m(i,t+1)$は t 期の資産$m(i,t)$で

$$m(i,t+1) = m(i,t)\left\{1 + q(i,t)\,s(i,t)\right\}, \qquad (1)$$

と表せる．ただし

$$m(i,0) = m_0, \qquad (2)$$

である．相互作用がないので個人を指定するインデックスは必要ないが，シミュレーション過程では n 人からなる系を取り扱うので， 個人を指定するインデックスを入れておく．総資産は

$$\sum_{i=1}^{n} m(i,t+1) = \sum_{i=1}^{n} m(i,t) + W(t) - L(t), \qquad (3)$$

となるから，特別な場合を除いて総資産は保存しない．これから総資産は増減するが，考えている系は開放系であり，環境と資産のやり取りをしているモデルとなっている．

式(1)は等比数列であるから初期値によって表現できて

$$m(i,t) = m_0 \prod_{k=0}^{t} \left\{1 + q(i,k)\,s(i,k)\right\}, \qquad (4)$$

と表わされる．以下では簡単のために$q(i,t)$を定数$q(i,t)=q$とおく．また，$s(i,t)$は一定確率 p で+1 を，確率$1-p$で－1 をとる．このとき式(4)から期待値は

$$
\begin{aligned}
&\langle m(i,t)\rangle\\
&= m_0 \sum_{k=0}^{t} {}_tC_k \left[(1+q)\,p\right]^k \left[(1-q)(1-p)\right]^{t-k}\\
&= m_0\left[1+q(2p-1)\right]^t, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる．式(5)は，t 回勝負する時の k 回勝つ場合の数 ${}_tC_k$ とその時の利得率 $\left[(1+q)\,p\right]^k\left[(1-q)(1-p)\right]^{t-k}$ を掛け合わせて k について 0 から t まで和をとり，t を決めた時の勝ち負けのすべての組み合わせを考慮したものである．$p=1/2$ のときは各個人の期待値は初期値 m_0 に等しく，時間平均の資産は増減しないことになる．一方 $p>1/2$ では初期資産より大きく，他方 $p<1/2$ では初期資産より小さくなることが期待される．勝ち負けを左右する確率 p の値は個人の資産の量などによらずに決まるので，誰にも平等で機会は均等と言える．

ところで，この単純な確率過程で支配された系で富の偏在が起こる理由を考えてみよう．式(5)のスペクトル

$$
m_S(t,k) = {}_tC_k\left[(1+q)\,p\right]^k\left[(1-q)(1-p)\right]^{t-k}, \quad (6)
$$

は，t 回投資した時の資産を勝ち数 k の関数として表したものである．勝ち負けの組み合わせの数 ${}_tC_k$ の k についての和に等しい人数をとり，その一人一人が勝敗の確率ツリーのパスと 1 : 1 に対応するとしよう．すると一人一人に資産が割り当てられるので，資産に対する人口分布を求めることができる．$t=12$ とし，$p=1/2,\ q=0.1$ のときの勝ち数に対する資産の分布を図 2 に示した．縦軸の資産は初期総資産で規格化してある．図 2 に対応して，$n=\sum_{k=0}^{12} {}_{12}C_k = 4096$ 人を確率ツリーのすべての分枝に割り当てて，資産の最大値 $m_0(1+q)^t$ と最小値 $m_0(1-q)^t$ の間を 10 等分して，それに対する人口分布を求めたものが図 3 である．縦軸は人口 n で規格化されていて，横軸は初期資産 m_0 で規格化されている．勝ち負けの組み合わせの数 ${}_tC_k$ は k に関して対称だが，リターンとロスを記述する項 $\left[(1+q)\,p\right]^k\left[(1-q)(1-p)\right]^{t-k}$ は k に関して指数関数的に増加するので，式(6)で与えられる富のスペクトルが k に関する対称性を失い，富の区分分布はべき則となり，その指数は －0.466 となる. 純粋な確率過程だけで富の偏在が起こるのは，勝敗におけるリターンとロスの非対称性，つまり勝ちと負けの回数が同じであっても，$m(i,t)(1+q)^{t/2} \neq m(i,t)(1-q)^{t/2}$ となるからであり，ステップ幅が勝ち負けによって異なるランダムウォークで格差が拡大していくと考えることができる．そしてこれは一般の p に対しても成り立つ．

一方，シミュレーションでは人口と確率ツリーのパスとを 1 : 1 に対応させることは不可能なので，どの程度の n を取ればよいのかを，上で得た富の区分分布のべき則の指数の値 －0.466 に照らして検討してみる．上と同じ条件 $(p=1/2, q=0.1)$ で，式(1)を n ＝ 3000 から n ＝ 15000 まで 1000 刻みと，n ＝ 20000, 50000 の

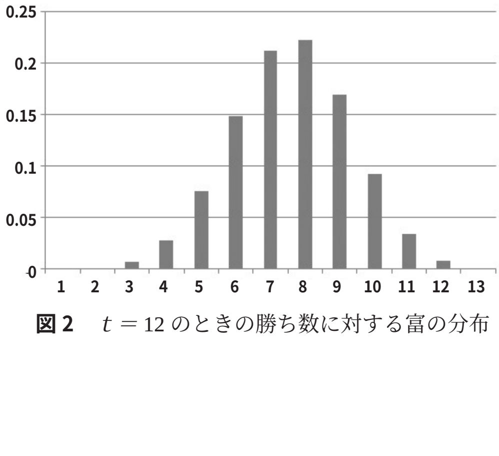

図 2　t ＝ 12 のときの勝ち数に対する富の分布

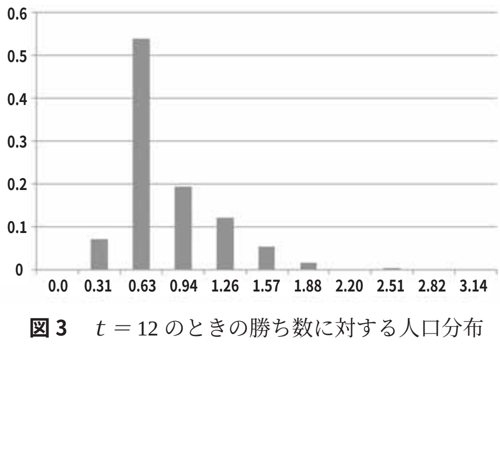

図 3　t ＝ 12 のときの勝ち数に対する人口分布

場合に解いて，$t = 12$における富の区分分布を求め指数を比べた．いずれの場合もべき則の指数は-0.445 ± 0.005の範囲に入っており，さきの指数の値－ 0.466 と大きな差はないことが示された．このことはシミュレーションにおいて t が大きくない限り，勝ち負けのすべての場合の数に見合った n を選ぶ必要はないことが分かる．

ところで t が大きくなると，勝ち負けの全ての組み合わせの数$\sum_{k=0}^{t} {}_tC_k$は膨大になるため，系を構成する個人がとれる確率ツリーのパスの数は極めて制約されることになるが，それでもある程度の数のパスをカバーできる人数をとれば，全体の特徴を捉えることについて大きな誤差はないと言える．図 4 は$t = 15$に対して富のスペクトル式(6)から区分分布を求めたものであり，図 5 は式(1)を$\sum_{k=0}^{15} {}_{15}C_k = 32768$の 1/6 程度の$n = 5000$にたいして計算した時の$t = 15$における区分分布である．これら 2 つのべき則の指数を比べてみると図 4 では－ 0.521 であるのに対して，図 5 では－ 0.504 であり，よい一致といえる．シミュレーションでは，t を決めたときの勝ち負けのすべての組み合わせの数に比べて小さな人数を取らざるを得ないが，現実の社会の構成員の総数も，とりうる組み合わせの全数よりはるかに小さいので，シミュレーションが現実を模すと考えてよい．

以上から，勝ち負けの組み合わせの総数に等しい数の人を確率ツリーのすべてのパスに割り当てても，リターンとロスの非対称性ゆえに富の偏在が起こるが，確率ツリーのすべてのパスの数に比べてはるかに少ない人数を取った時でさえも，パスはランダムに選ばれるので統計的には対称性が高く，結局はリターンとロスの非対称性による富の偏在が起こるという特徴を描き出すことになる．

2.2　相互作用のある系

敗者は投資額すべてを失い，勝者は投資総額を投資額に応じて分配されることとする．$t + 1$期の個人 i の資産は

$$m(i,t+1) = m(i,t)\left[1 + q(i,t)\left\{\frac{1+s(i,t)}{2}\frac{L(t)}{W(t)} - \frac{1-s(i,t)}{2}\right\}\right], \quad (7)$$

ただし

$$m(i,0) = m_0. \quad (8)$$

明らかに保存則

$$\sum_{i=1}^{n} m(i,t+1) = \sum_{i=1}^{n} m(i,t), \quad (9)$$

が成り立つ．ここでは総体としての n 人ゼロサムゲームとなっており，たとえば外国為替市場の単純化と考えることができる．

市場に参加する人の数 $n = 5000$，計算期間 $t = 5000$，各期ごとの勝敗の確率$p(i,t)$と投資率$q(i,t)$はすべての人に一定として

$$p(i,t) = p_0 = \frac{1}{2},\ q(i,t) = q_0 = 0.1.$$

初期の配分額は$m_0 = 1000$とした．

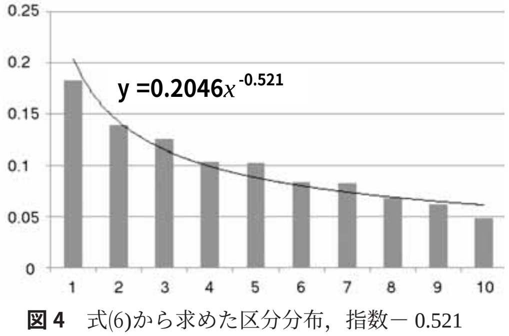

図 4　式(6)から求めた区分分布，指数－ 0.521

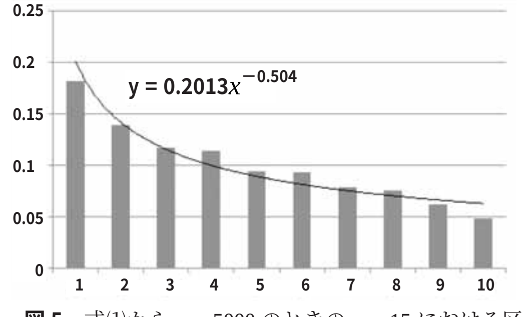

図 5　式(1)から　= 5000 のときの　= 15 における区分分布，指数－ 0.504

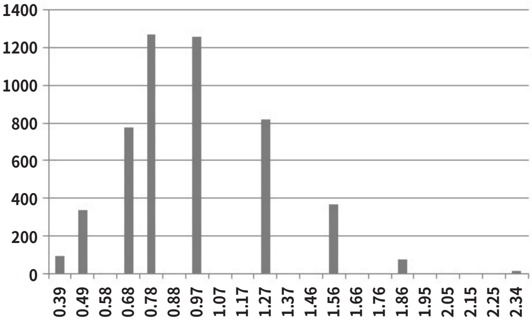

図 6　相互作用のある系の富に対する人口分布
（　＝10）

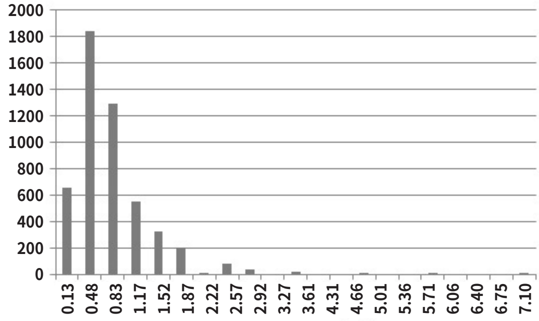

図 7　相互作用のある系の富に対する人口分布
（　＝30）

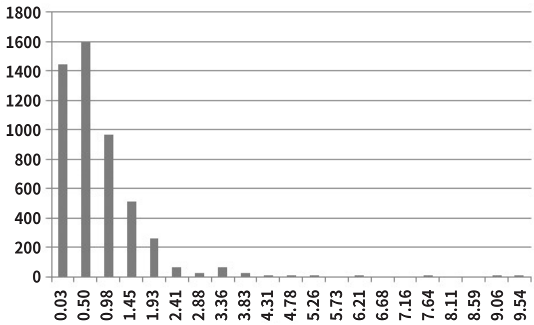

図 8　相互作用のある系の富に対する人口分布
（　＝50）

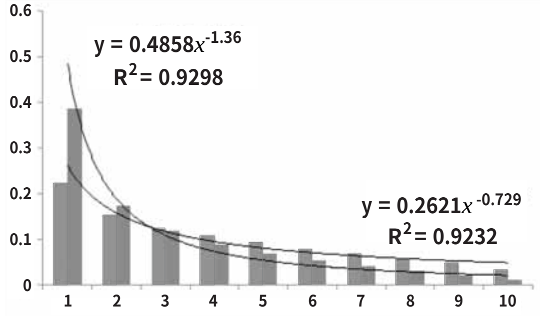

図 9　相互作用のある系の富の区分分布
＝30（指数－0.729），　＝100（指数－1.36）

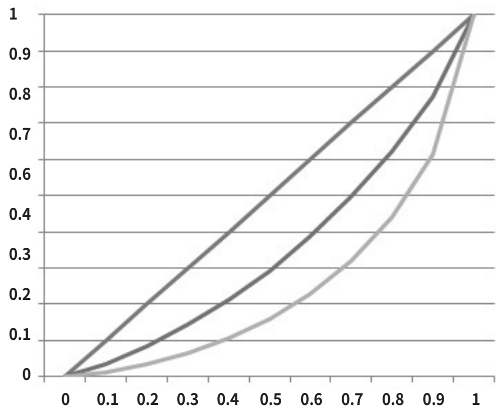

図 10　相互作用のある系のローレンツ曲線；
対角線（　＝0）から下に向かって t ＝30,
t ＝100

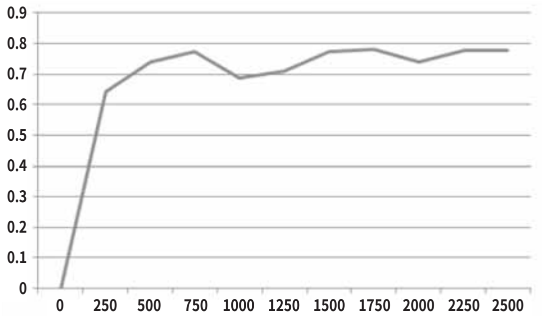

図 11　相互作用のある系のジニ係数の時間発展

図 6－8 は $t = 10$，$t = 30$，$t = 50$ における富に対する人口分布で，横軸は各 t における富を初期値 m_0 で規格化したもので，各 t における最大値と最小値の区間を示したものである．

図から富の小さいほうに多くがシフトしていく中で，富の大きい方に少数が分布していて，テイルが観測できる．このテイルがべき則を与える．

図 9 は富の区分分布で，区分分布の指数の絶対値は t とともに大きくなって，富の偏在の進行を示している．

図 10 のローレンツ曲線は，対角線が初期値，t とともに曲線は対角線から離れていき，富の偏在が進むことを示している．図 11 はジニ係数の時間発展である．ジニ係数は t とともに大きくなるが，$t = 250$ を超えると 0.8 程度で頭打ちになり振動を始める．これは先にも書いたとおり，勝ち負けの組み合わせの数が膨大となり，大きい t に対しては，n の範囲で勝ち負けの確率ツリーのパスをランダムに選択することになるから，統計的平均の周りで振動すると考えられる．確率ツリーのパスは対称に分布しているので，すべてのパスを汲みつくすことがなくてもランダムに選択することで勝ち負けの場合の対称性をかなりの確度で保てるため，リターンとロスの非対称性が効いてきて富の偏在を反映することになる．

図 12－14 は個人の富の時間変化を示したものである．これによれば成功した個人が貧者に転落する過程や貧者が成功者に転ずる可能性があることがみてとれる．つまり分布からは見えないミクロな個人の状態は，成功と失敗が織りなす「塞翁が馬」であることをみてとることができる．ただし，それが個人の生涯の中で起こることはすべての人にとってあるわけではないということが不幸なことなのかもしれない．大きな富を持つようになった個人は明らかに収穫逓増，つまり雪だるま式の勝ちを得ても，いつまでも続くわけではなく凋落してしまう．また最初資産を失った個人のなかには勝ち続けて富裕層の仲間入りするものも出てくるが，全体としてみると凋落する個人や復活する個人は全体の中ではごくわずかな存在で，圧倒的多数は勝ったり負けたりを繰り返す．これは勝ち負けの確率ツリーの構造と整合的である．

面白いことは個人のレベルでは浮き沈みを経験しながら，つまり階層を構成する個人は入れ替わりながら，社会全体の富の区分分布はべき則へ移行して，富の大きな偏在が起こる．したがってこれを適正化するためには税金などの富の再配分機構を持ち込む必要がある．

3. 富の偏在の適正化

先に示した確率過程における富の偏在に関するシミュレーションにおいて確認された問題は，t を大きくしていくと富の偏在が進むということである．この偏在化をある程度緩和する方法は税金の導入である．現在，米国で議論されている「バフェット・ルール」と呼ばれる高額所得者への増税案やそれに呼応する形での欧州各国の富裕層への課税増大の議論も，これに相応していると考えられる．税金の掛け方はさまざま考えられる．

- リターンに税をかける．
- 平均を上回る富に対して税をかける．
- リターンにかけた税金をすべての構成員に等分配する．
- リターンにかけた税金を負けた者だけに等分配する．

などである．どの方式でも，定常状態が実現するまでの時間ステップ数に差はあるものの，偏在化が緩和された社会が実現する．

ここではリターンに税金をかける例のみを示すことにする．α を税率として相互作用のない系を考えると，資産の変化は

$$m(i,t+1) = m(i,t)\left\{1 + q(i,t)\,s(i,t)\right\} - \frac{1+s(i,t)}{2}\alpha q(i,t)\,m(i,t), \quad (10)$$

で表わされる．ここでは $q(i,t) = 0.1$，$p = 1/2$，$n = 500$, $t = 1000$ とした．

どの程度のジニ係数の社会が適合的であるかは議論の分かれるところであるが，現在のモデルでは税率 20 %程度で多くが納得できる社会になる．

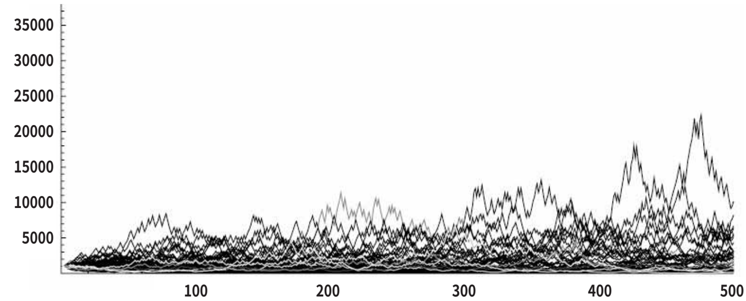

図 12　個人ごとの富の時間変化（0－500）

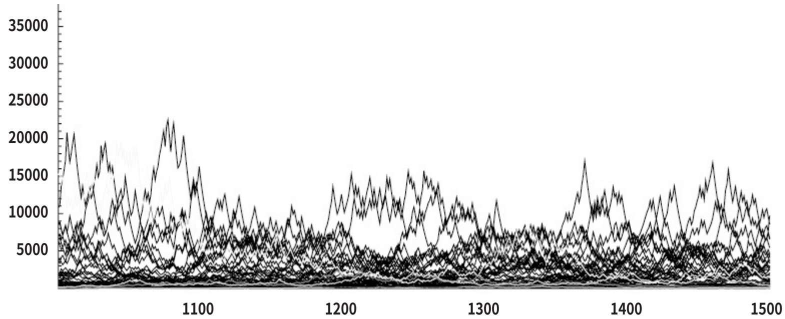

図 13　個人ごとの富の時間変化（500－1000）

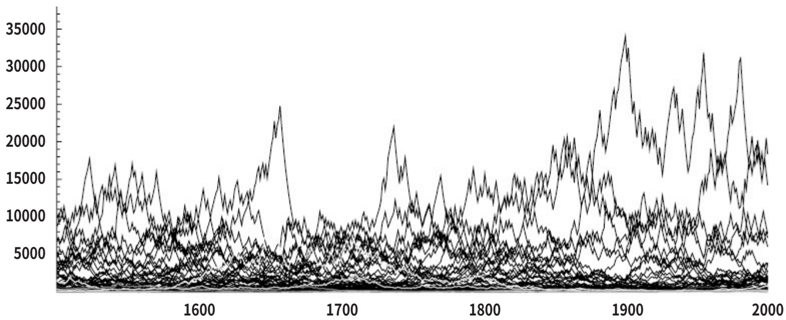

図 14　個人ごとの富の時間変化（1000－1500）

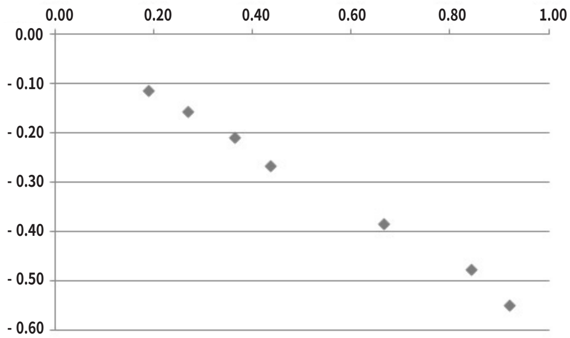

図 15　税率を変化させたときのジニ係数（横軸）と区分分布指数の散布図

税率 α を変化させたときのジニ係数と区分分布指数の散布図をグラフにしたものが図 15 である．ジニ係数と区分分布指数はともに税率に対してほぼ線形に変化していることから，ジニ係数と区分分布指数がある関係で結ばれていることを示唆していると言えよう．富の偏在を評価するものとしてジニ係数が使われているが，それは富の偏在の形成メカニズムを問うものではないため，ジニ係数とべき則の指数とが相互に変換できる関係を見つけることを今後の課題の一つとしておきたい．

4. ま と め

世界の平和と安定は富の配分と強く結び付いている. それは一つの国においても同じことである．富が個人にどのように配分されているかは区分分布で調べるとべき則で与えられるので，その指数から公平の度合いを測ることができる．実際のデータから，世界においても国内においても富の偏在は普遍的と言わざるを得ない．つまり市場経済のもとでは個人の努力もさることながら，個人の努力を超えたところで貧富の差を生みだすメカニズムがビルドインされているのではないかと思わせるほどである．もちろん権力的関係で富を独占する人々もいるが，今回はそうした強権的蓄財は考察の対象からはずして，純粋な形で市場経済を表すことで，論点の解明に肉薄できると考えたものである．

市場経済は交換を基本として成り立っているが，交換価値は取引者固有の価値体系のもとで判断されるので，等価交換というのは貨幣を媒介にすることで見かけ上成り立っているものであり，価値認識は基本的に非対称と言わざるを得ない．価値基準が個人の属性であることを認めるならば，交換はゲームであり，利得行列が暗黙裡に非対称になっていると考えることができる．それを純化すれば，サイコロを振って勝ち負けを決めることに帰着する．

この論文では，個人の選好とは無関係に，確率過程だけで富の偏在が進行することを示した．そして富によって分化された階層は永遠ではなく，「盛者必衰」であること，だからこそ権力や陰謀が忍び込む余地を残していることになる．

富の偏在は確率的事象であり，その意味で公平なものである．ただし，富裕層に属したり，貧困層に落ち込んだりするタイムスケールが個人の生涯に比べて長いものであったら，一生のうちに貧困層から富裕層へ這い上がるチャンスがないと悲観することになり，一方で富裕層は一生を安楽な人生を送ることができることになる．

Beck は富の配分を問題にする時代は終わり，今は貧富の差なく襲いかかるリスクの配分こそが問題であると言っているが，経済活動によって生命が保持されている限り富の配分問題はなくならないであろう．したがって政策的に富の偏在を緩和する方法としての税があるといえる．しかし，一方で，国内での税の高率化は富の海外流出を招くことにもなりうるとの観点から，注意も必要である．

この論文では q を一定にして問題の所在を明らかにしたが，現実の社会はさまざまな価値のぶつかり合いで展開しているので，q を個人の属性として戦略的に変化させることを許すモデルの構築が必要である．また経済が発展局面にあるか，下降局面にあるか，あるいは停滞局面にあるかは p で制御できる．また，何らかの権力や陰謀が p に影響を与えるといったモデルを構築することも可能である．したがって本論文で扱ったモデルは単純であるものの，広範な応用を持つプラットホームであると言えよう．

参 考 文 献

［1］Beck, Ulrich (1992): *Risk society: towards a new modernity*, Sage publication

［2］Buffett, E. Warren (2011):“Stop Coddling the Super-Rich”, New York Times, August 14

［3］Davies, B. James; Sandstrom, Susanna; Shorrocks, Anthony; and Wolff, N. Edward (2008): “The World Distribution of Household Wealth”, World Institute for Development Economic Research (UNU-WIDER) in its series Working Papers with number DP2008/03

[4] Pareto, Vilfred (1897) : “The New Theories of Economics”, J. Pol. Econ., Vol.5, pp.485－502