

Morse関数で見る3次元多様体

3-dimensional manifolds considered through Morse functions

数学専攻 池田 博好

IKEDA, Hiroyoshi

1 Morse理論

定理 1.1. f を Morse 関数とし, p を f の臨界点でその指数は λ とする. このとき, p の局所座標系 (x_1, x_2, \dots, x_n) で次を満たすものが存在する. $x_i(p) = 0$, $f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$. これを f の標準形という.

定理 1.2 (Morse 関数の存在). 任意の閉多様体に対し, Morse 関数が存在する.

定義 1.3 (Heegaard 分解). M を向き付け可能な連結 3 次元閉多様体とし, $h^i (i = 0, 1, 2, 3)$ を i ハンドルとする. f を M 上の Morse 関数で, それに付随するハンドル分解には 0 ハンドルと 3 ハンドルがそれぞれ 1 個しか存在しない様なものとする.

$$M = h^0 \cup (h_1^1 \sqcup \dots \sqcup h_{k_1}^1) \cup (h_2^2 \sqcup \dots \sqcup h_{k_2}^2) \cup h^3.$$

このとき, 1 ハンドルの個数 k_1 と 2 ハンドルの個数 k_2 を用いて, M の Euler 数を計算すれば, $k_1 = k_2$ となる. この値を k とおく. また, このハンドル分解の 0 ハンドルと 1 ハンドルを合わせた部分ハンドル体を N とおくと, $\partial N = \Sigma_k$. $M \setminus \text{int}(N)$ を N^* とおくと, N^* は $-f$ に付随する逆さまのハンドル分解のなかの 0 ハンドルと 1 ハンドルを合わせたものになっている. N^* の 1 ハンドルはもとのハンドル分解の 2 ハンドルに対応しているから, N^* の種数は N のなかの 2 ハンドルの個数に等しく, それは N の種数と同じく k である. 従って, N^* は N に微分同相である. 故に, 同じ種数 k のハンドル体 N^*, N をその境界の間の微分同相写像 $\varphi: \partial N^* \rightarrow \partial N$ で貼り合わせた多様体として M を表す ($M = N \cup_\varphi N^*$) ことができた. この様に M を表すことを種数 k の Heegaard 分解 (Heegaard splitting) という.

定理 1.4. 任意の向き付け可能な連結 3 次元閉多様体は Heegaard 分解を持つ.

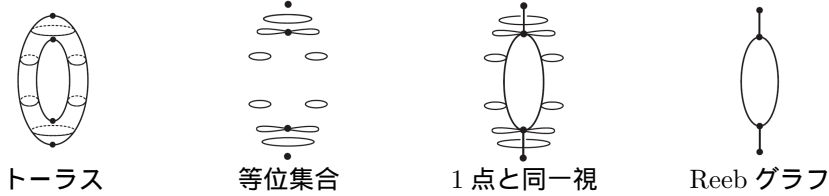
2 Reeb グラフ

関数 f に対する Reeb グラフ $R(f)$ とは次の同値関係における位相空間の商集合である.

定義 2.1 (同値関係). $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を位相空間 X 上の関数とする. $x, y \in X$ が同値であるとは, x, y が f のある等位集合における同一の連結成分に属しているときをいう.

つまり, $R(f)$ は f による X の等高線の集合である. Morse 関数に対する Reeb グラフの定義は, 上の定義において, X (改めて M とおく) を d 次元多様体 ($d \geq 2$), f を M 上の Morse 関数とすればよい. このとき, $u \in R(f)$ に対し, $\psi^{-1}(u)$ が臨界点を含むとき, 即ち臨界点と同値のとき, u を Reeb グラフのノード (node) と呼ぶ. 但し, $\psi: X \rightarrow R(f)$ は商写像である. ここで, Morse 関数をうまくとることで各臨界点が異なる臨界値を持つようにする. それにより臨界点とノードの間に一対一対応を付けることができる. Reeb グラフのノード以外の点はノードをつなぐ辺 (arc) に対応している. ノードにつながれている辺の本数をノードの次数 (degree) という.

トーラスを例として Reeb グラフの描きかたを確認する. トーラスをその高さ関数に対する等位集合 (即ち等高線) で切る. そして, その連結成分はそれぞれ同値関係にあるから, それを 1 点として描けば Reeb グラフが得られる.



これがトーラスの高さ関数に対する Reeb グラフである (黒丸が臨界点). また, Reeb グラフにループが現れないとき, その Reeb グラフを単純 (simple) な Reeb グラフという.

補題 2.2 (2 次元閉多様体に対するループ補題). M を種数 g の 2 次元閉多様体, f を M 上の Morse 関数とする. このとき, Reeb グラフに現れるループの数 $\#loop$ は多様体の向き付け可能性により次のようになる.

$$\#loop \begin{cases} = g & (M \text{ が向き付け可能}) \\ \leq \frac{g}{2} & (M \text{ が向き付け不可能}). \end{cases}$$

向き付け不可能な場合の不等式はループの数が Morse 関数に依存して変わることを意味している.

Reeb グラフは向き付け可能な 2 次元閉多様体に対しては Morse 関数に依存せずホモロジーが決まる (Reeb グラフのループの数). しかし, 次元を上げたら Reeb グラフにはどのような影響があるだろうか. その影響の 1 つが次の命題である.

命題 2.3. 連結 3 次元閉多様体は Reeb グラフが単純になる Morse 関数を持つ.

3 直積空間

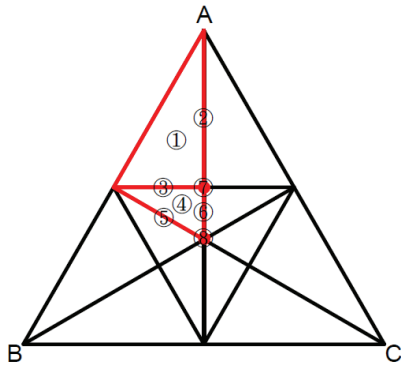
直積により得られる多様体に対し, Morse 関数を次の様に作ることができる. 多様体 M が直積空間 $M = \prod_{i=1}^m X_i$ であるとし, f_i を X_i 上の Morse 関数とする. このとき,

$$\begin{cases} F = (f_1 + A_1) \times (f_2 + A_2) \times \cdots \times (f_m + A_m) & (f_i + A_i > 0) \\ F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_m f_m & (A_i > 0, \sum_i A_i = 1) \end{cases}$$

等が M 上の Morse 関数になる. この構成方法は一般のファイバー束に対しても意味を持つ. 何故なら, ファイバー束は局所的にならば直積で表せる. 故に, 局所的に値を持つ関数を用いることで大域的に Morse 関数を定義できる.

3.1 3 次元トーラス

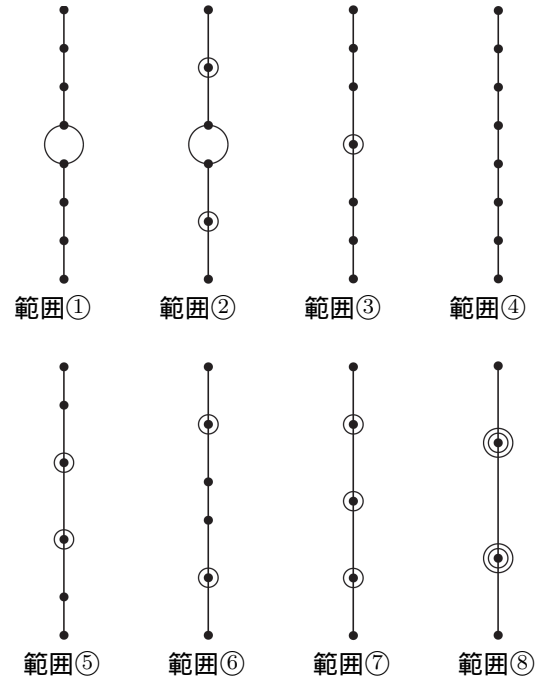
次は 3 次元トーラス $T^3 (= S^1 \times S^1 \times S^1)$ について考察していく. 各 S^1 上の Morse 関数を f, g, h とし, T^3 上の Morse 関数を $F = Af + Bg + Ch$ で定義する. このとき, 定数 A, B, C の範囲を次の図に描かれた 8 つの場合に分けて考察する.



①	$\frac{1}{2} < A < 1$	$0 < B < \frac{1}{2}$	$0 < C < \frac{1}{4}$
②	$\frac{1}{2} < A < 1$	$B = C$	
③	$A = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} < B < \frac{1}{2}$	$0 < C < \frac{1}{4}$
④	$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} < B < \frac{1}{2}$	$0 < C < \frac{1}{3}$
⑤	$A = B$		$0 < C < \frac{1}{3}$
⑥	$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{2}$	$B = C$	
⑦	$A = \frac{1}{2}$	$B = C = \frac{1}{4}$	
⑧	$A = B = C = \frac{1}{3}$		

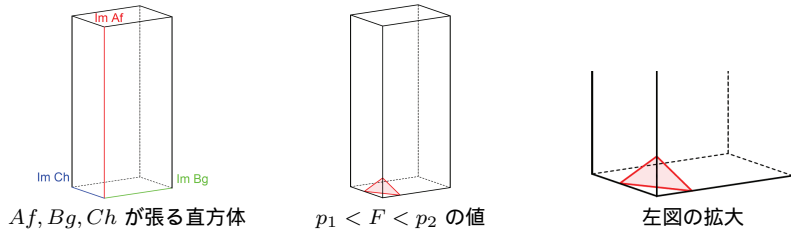
F の臨界点は各 S^1 上の Morse 関数に対し臨界点であるから、各範囲ごとに 8 個出てくる。それぞれの範囲で A, B, C に範囲内の具体的な値を代入し計算していく。次の表と図が各範囲での臨界点に於ける断面図と Reeb グラフである。但し、この場合も指数 0 と 3 の臨界点に対する断面図は 1 点だけなので省略している。

範囲	断面図
①	
②	
③	
④	
⑤	
⑥	
⑦	
⑧	



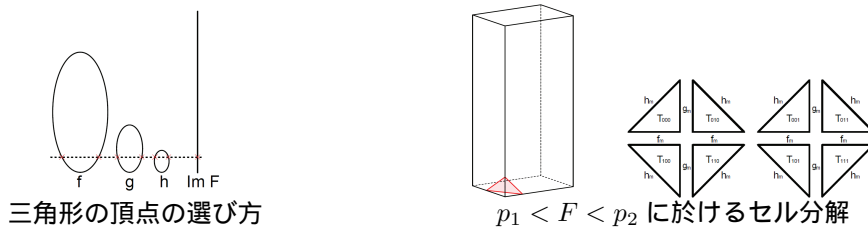
3.2 等位集合のセル分割

今の方法では多様体の断面の形をきちんと捉えることができるかわりに、位相的な部分に分かりにくい。そこで、等位集合のセル分割を考える。その方法は、まず Af, Bg, Ch で張られる直方体を考え、そこに F の値に対する f, g, h の関係を描く。(①の場合)

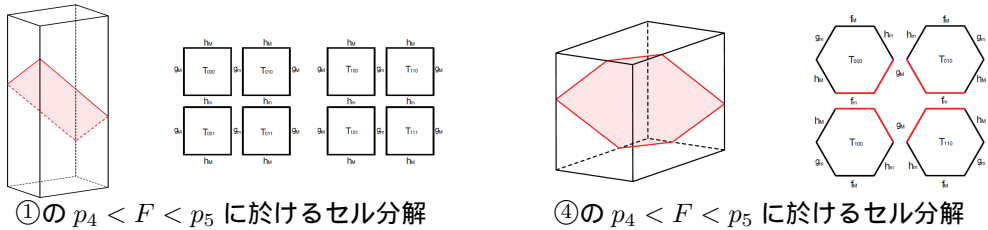


この三角形の内部は $f, g, h \in (-1, 1)$ を満たす点で、各辺は f, g, h のいずれかが -1 となる点である。故に、内部の点に対しては f, g, h の逆像が 2 つずつ存在するから、多様体上の点が 8 つの三角形に対応していることになる。それらを T_{ijk} , $i, j, k = 0, 1$ とおく。

そして、三角形の辺に対応する逆像は 1 点だけであるから、そこを境に 2 つの三角形が鏡映的に貼り付いている。これを 8 つの三角形すべてに対して考えると、次の様に貼り付いている (f_m, g_m, h_m はそれぞれ f, g, h の最小値を、 f_M, g_M, h_M はそれぞれ f, g, h の最大値を境に貼り付くことを意味している)。



これが等位集合のセル分割である。次の図は範囲①, ④ で Reeb グラフに差が出た部分である (右図は赤く塗られた部分で 4 つの六角形が貼り付いている)。



左図は 2 つのトーラス、右図は種数 3 の閉曲面である。

参考文献

- [1] I.M. シンガー/J.A. ソープ, 赤攝也監訳, 松江広文/一楽重雄共訳, トポロジーと幾何学入門, 培風館, (1976).
- [2] 森本勘治, 3次元多様体入門, 電子版, (2013).
- [3] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 27, 岩波書店, (1997).
- [4] J.Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1963)(邦訳あり).
- [5] H.Edelsbrunner, J.L.Harer, *Computational Topology An Introduction*, Applied Mathematics, AMS, (2010).