可分計画法を用いた区分的線形抵抗回路の全解探索法

Finding All Solutions of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Separable Programming

電気電子情報通信工学専攻　田中　秀樹
Hideki　TANAKA

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形抵抗回路の全解探索は回路シミュレーションにおいて重要な未解決問題の一つである．この問題を解決するために、近年様々な効率的なアルゴリズムが提案されている．しかし，これらのアルゴリズムはインプリメンテーションの際に高度な専門知識と複雑なプログラミング技術を必要とするため，初心者や非専門家には敷居の高い方法であった．また，区分的線形抵抗回路の全解探索に整数計画法を用いる方法は，近年の最適化アルゴリズムの進歩により，以前よりも大規模な問題を解くことができるようになっているが，多項式時間で解くことのできる線形計画法に比べて解き難く，計算時間がかかる方法である．そこで，本研究で提案する手法は，区分的線形抵抗回路の回路方程式を可分計画問題に置き換え，それを既存のシンプレックス法に「制限付き基底の入れ替え 」という制限を加えたものを用いて解くことで，従来の方法と比べて実装容易性に優れ，効率的にすべての解を探し出すことができる．

2. 対象とする問題

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\triangle}{=} \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ は非線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への区分的線形関数（ただし各成分は一変数関数とする），$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{r}$ は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．本研究では式 (1) の解を求めることを考える．

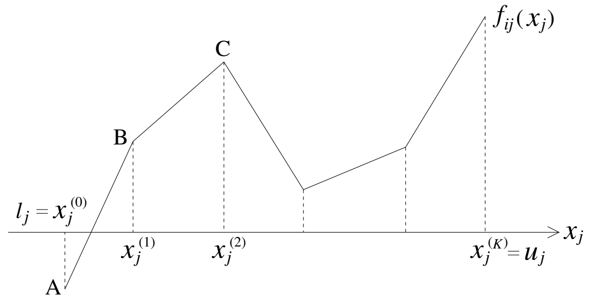

図 1　区分的線形関数 $f_{ij}(x_j)$.

2.1 定式化手法

式 (1) は変数分離されている方程式であるため，

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j); \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

と表すことができる．よって区間 [k,k+1] 上の点 $x_j^{(k)} \leqq x_j \leqq x_j^{(k+1)}$, $f_{ij}(x_j)$ は幅の割合を示す変数 λ を用いることにより

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_j) &= \lambda_j^{(k)} f_{ij}(x_j^{(k)}) + \lambda_j^{(k+1)} f_{ij}(x_j^{(k+1)}) \\ x_j &= \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)} + \lambda_j^{(k+1)} x_j^{(k+1)} \end{aligned} \qquad (3)$$

と表すことができる．これを解析領域 $[l_j, u_j]$ の全体で考えると $f_{ij}(x_j)$ は,

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_j) &= \sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} f_{ij}(x_j^{(k)}) \\ x_j &= \sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)}, \\ \sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} &= 1, \quad \lambda_j^{(k)} \geqq 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

となる．

以上の手法を用いる事で，式 (1) は

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{K}\lambda_j^{(k)} f_{ij}(x_j^{(k)}) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \quad (5a)$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{K}\lambda_j^{(k)} x_j^{(k)}, \quad j = 1,2,\cdots,n \quad (5b)$$

$$\sum_{k=0}^{K}\lambda_j^{(k)} = 1, \quad j = 1,2,\cdots,n \quad (5c)$$

$$\lambda_j^{(k)} \geqq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n; \quad k = 0,1,\cdots,K \quad (5d)$$

$$\lambda_j^{(k)}\lambda_j^{(l)} = 0 \quad \text{if} \quad l > k+1; \quad k = 0,1,\cdots,K-1. \quad (5e)$$

と変換することができる．ここで条件 (5e) は隣接条件といわれるもので，多くとも 2 つのλが値を持ち，λ は隣接する必要があることを示している．この隣接条件について簡単に説明する．

例として図 1 を考える．$\lambda_j^{(0)}$ と $\lambda_j^{(1)}$ が値を持ち，$\lambda_j^{(2)}$ から $\lambda_j^{(K)}$ がゼロとなるとき, 求まる値は線分 AB 上の点となるため正しく区分的線形関数を示すことができる．しかし，$\lambda_j^{(0)}$ と $\lambda_j^{(2)}$ が値を持ち，他の λ がすべてゼロとなるとき，求まる値は線分 AC 上の点となるため区分的線形関数を正しく示すことができない．つまり隣接条件とは区分的線形関数を正しく表現するためのものである．

2.2 提 案 手 法

ここでは，提案手法として可分計画法のアイデアを用いて区分的線形抵抗回路の近似解を求める手法について述べる．また，制約式を追加することにより区分的線形抵抗回路のすべての解を求める方法についても述べる．

2.2.1 可分計画法を用いた解析法

式 (1) を解くために以下のような問題を考える．

最小化：任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{K}\lambda_{l,j} f_{i,j}(x_{l,j}) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \\
&\sum_{k=0}^{K}\lambda_j^{(k)} = 1 \\
&\lambda_j^{(k)} \geqq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n;\ k = 0,1,\ldots,K \\
&\lambda_j^{(k)}\lambda_j^{(k')} = 0 \\
&if \quad k' > k+1; k = 0,1,\ldots,K-1
\end{aligned} \quad (6)$$

このような問題を可分計画問題と呼ぶ．可分計画問題 (6) の制約条件を満たす点はすべて式 (1) と等価となるため目的関数は任意の定数とすることができ，この問題を解くことで近似解を求めることができる．可分計画問題 (6) は式 (5e) の隣接条件を満たすように従来のシンプレックス法のアルゴリズムに「制限付き基底の入れ替え 」と呼ばれる制限を加える事により解く事ができる．

2.2.2 制限付き基底の入れ替えのアルゴリズム

ここでは「制限付き基底の入替え 」を適用したシンプレックス法のアルゴリズムを説明する．

基本的な操作は従来のシンプレックス法と同じである．目的関数の最小化を考える場合，まずシンプレックス基準を計算し，最も小さいシンプレックス基準を持つ λ を選択する．次に，比の計算を行い入替える基底を選択する．ここで，隣接性を保つために基底の入替えが可能かどうかを判別する．今，基底に入ろうとしている λ が変数 x_i 方向に関する λ とすると，基底の入れ替えができるのは以下の場合である．

- x_i に関する λ が 1 つも基底に存在しない場合．
- x_i に関する λ が 1 つ基底に存在し，その基底と入替える場合．
- x_i に関する λ が 1 つ基底に存在し，その基底と新たに基底にしたい λ が隣接する場合．
- x_i に関する λ が 2 つ基底に存在し，どちらかの基底と入替えを実行しても隣接性が保持される場合．

以上のいずれの条件も満たさない場合は，基底の入替えが不可能である．その場合は次に小さなシンプレックス基準を持つ λ を選び，基底の入替えの判別を再度実行する．

この操作を，負のシンプレックス基準がなくなるか，全ての負のシンプレックス基準に対して入替えが不可能になるまで繰り返し，可分計画問題の最適解を得る．

2.2.3 可分計画法を用いた区分的線形抵抗回路の全解探索

前節で述べた求解法において n 変数の区分的線形方程式を解いたときの λ の関係式は

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(k_j)} + \lambda_j^{(k_j+1)}) = n \quad (7)$$

となっている．ここで以下の λ の関係式

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(k_j)}+\lambda_j^{(k_j+1)})<n \tag{8}$$

を制約条件に追加し，再び修正シンプレックス法で解析を行うことで，得られた解領域を解析対象から外し次の新しい解を得ることができる．これをその問題が持つ解の個数 $N+1$ 回繰り返し行うことで，すべての解を求めることができる．

ここで，例として文献 [1] にある図 2, 図 3 のような 3 つの解をもつ 2 変数の区分的線形方程式を考える．

$$\begin{aligned} 2g_1(v_1)+v_1+v_2-9=0 \\ 2g_2(v_2)+v_1+v_2-9=0 \end{aligned} \tag{9}$$

まず，最初の修正シンプレックス法の計算で一つ目の解 α_1 が求まったとする．この時の λ の関係式は,

$$\lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)}=1 \tag{10}$$

$$\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)}=1 \tag{11}$$

となり，式 (10) と式 (11) を合わせると以下の関係式が得られる．

$$(\lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})=2 \tag{12}$$

ここで，先ほどの手法を用いて次の λ の関係式を式 (6) の制約条件に追加する．

$$(\lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})<2 \tag{13}$$

これにより解が得られた領域を解析領域から外すことができる．ここで式 (6) に式 (13) を加えた新たな可分計画問題を再び修正シンプレックス法を用いて解析を行うことで，二つ目の解 α_2 を求めることができる．先ほどと同様の手法で，二つ目の解の λ の関係式を導き，以下の式を制約条件に加える．

$$(\lambda_1^{(1)}+\lambda_1^{(2)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})<2 \tag{14}$$

これにより α_2 が存在する領域を解析領域から除外したことになる．ここで更に式 (14) を式 (6),(13) に加えた新たな新たな可分計画問題を解くことで三つ目の解 α_3 を求めることができる．

$$(\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})<2 \tag{15}$$

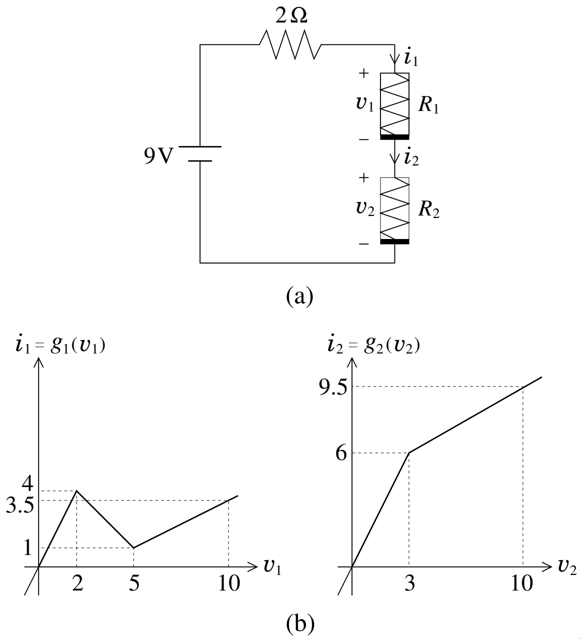

図 2　(a) 例題回路 1 と (b) 区分的線形抵抗 R_1, R_2 の電圧–電流特性

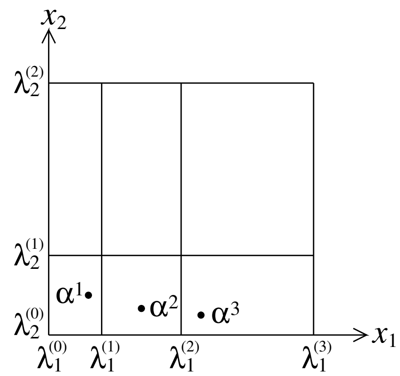

図 3　例題回路 1 の解領域

同様に式 (15) を新たに加え解析を行うと、今度は解析領域内に解が存在しないという結果が出力されるので解析を終了する．結果，解析領域内に存在する 3 つの解すべてを求めることができた．

つまり，本手法を用いることで式 (1) が持つすべての解を $N+1$ 回だけ解析を繰り返すことにより求めることができる．

2.3 数 値 例

それでは，本手法を適用した数値例を示す．アルゴリズムの実装には C 言語を用い，計算機は Dell Precision T7500 (CPU: Intel Xeon 3.33GHz) を使用した．また，すべての解析において区分領域数は 10 とした．

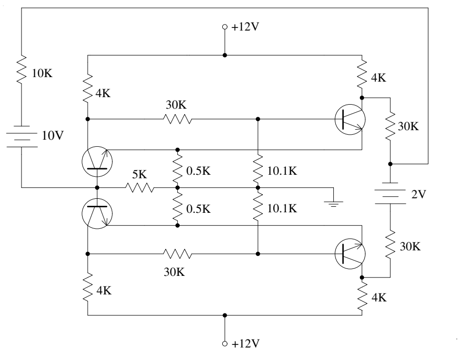

図 4　4 トランジスタ回路

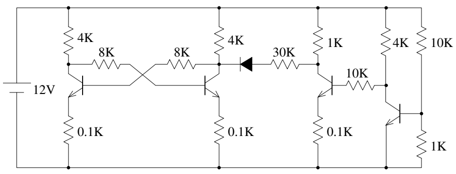

図 5　4 トランジスタ 1 ダイオード回路

表 1　例題 1 の計算結果

回路	n	N	ピボット回数	
			提案手法	文献 [5]
図 4	8	9	269	1 754
図 5	9	3	121	1 752
図 6	15	11	602	21 657
図 7	22	1	171	7 217

例題 1 トランジスタ回路

例題 1 として，図 4–7 のようなトランジスタとトンネルダイオードを用いた回路に回路方程式を解く．解析領域は $[-20, 0.5]$ とし，$[-20, 0]$ を 1 分割，$[0, 0.5]$ を 9 分割する．

結果それぞれの回路においてすべての解を得る事ができた．また，本手法を適用したときのピボット回数を表 1 に示す．

3. む す び

本研究では，可分計画法を用いた区分的線形抵抗回路の全解探索法を提案した．本手法は複雑なプログラミングや専門知識を必要とすることなく，従来のシンプレックス法に簡単な制限を加えるだけで実装が可能である．また，2.2.3 節の全解探索の手法を用いることで区分的線形抵抗回路の持つ解の個数 $N+1$ 回解析を行うことですべての解を求めることができる．そのため，数値例で示したように従来の線形計画法を用いた全解探索法よりも計算効率を向上させることができた．

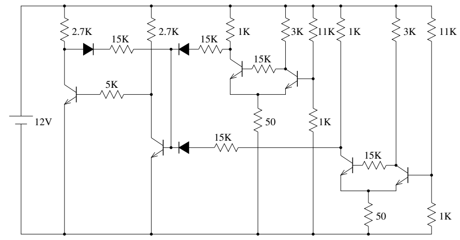

図 6　6 トランジスタ 3 ダイオード回路

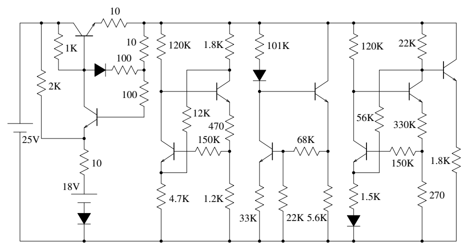

図 7　9 トランジスタ 4 ダイオード回路

謝辞　本研究を行うにあたり，多大なる御指導を賜わりました山村清隆教授に心より感謝の意を表します．また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します．

文献 (下線は研究業績)

[1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 10 no. 3, pp. 201–229, July 1982.

[2] T. Nishi, "An efficient method to find all solutions of piecewise-linear resistive circuits," Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., pp. 2052–2055, Portland, Oregon, May 1989.

[3] A. Ushida and T. Nakamura, "Interval analysis of nonlinear resistive circuits," Proc. Joint Tech. Conf. Circuits/Systems, Computers and Communications, pp. 499–505, Sapporo, Japan, June 1989.

[4] L. Vandenberghe, B.L. De Moor and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 36, no. 11, pp. 1382–1391, Nov. 1989.

[5] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 30, no. 6, pp. 567–586, Nov. 2002.

[6] H. Tanaka, H. Kato, and K. Yamamura, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using separable programming," Proc. 2012 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks, pp.67–70, Dec. 2012. 【発表者 】

[7] K. Yamamura and H. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using separable programming," Proc. 21th IEEE European Conference on Circuit Theory and Design, Sept. 2013. 【発表者 】

[8] K. Yamamura and H. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using separable programming," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E97-A, 2014 掲載予定..