

# 一般化線形相補性理論と整数計画法を用いた 区分的線形抵抗回路の完全解析

Complete Analysis of Piecewise-Linear Resistive Circuits

Using the Generalized Linear Complementarity Theory and Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻 前田 礼維

Rei MAEDA

## 1. まえがき

区分的線形抵抗回路の解析では，非常に複雑な形状の解集合をもつ回路を扱うことがある [1]．例えば複数の解をもつ回路，無限個の解をもつ回路，非有界な解集合をもつ回路，特性曲線が多角形などの有界平面を含む回路，複数の特性曲線をもつ回路などである．

このような複雑な形状の解集合をもつ回路のすべての解を求めることを，文献 [1] にならって，完全解析 (complete analysis) と呼ぶことにする．

完全解析は，ニュートン法，ホモトピー法，区間解析などの方法で対処することはできない．これに対し，文献 [1] では区分的線形回路の解析を一般化線形相補性問題に定式化し，それを解くことによって完全解析を実現する方法が提案されている<sup>(注1)</sup>．

しかし文献 [1] のアルゴリズムは理論が難しいうえに，インプリメントの際にかなり複雑なプログラミングや専門的知識を必要とする．そのため文献 [1] の方法は，初心者や非専門家にとっては実装容易性に欠ける，かなり敷居の高い方法となっている．

ところで近年，整数計画法の分野が飛躍的に発展し，かなり大規模な整数計画問題が実行時間内で解けるようになってきている．それにより，CPLEX[4]，SCIP[5] といった非常に優れた商用 / 非商用のソフトウェアが提供されている．

本論文では，一般化線形相補性問題を等価な混合整数計画問題で記述し，それを既存の整数計画ソルバーで解くことにより区分的線形抵抗回路の完全解析を行う，実装容易性に優れた方法を提案する．

## 2. 区分的線形抵抗回路の一般化線形相補性問題による定式化

図 1 に示すような  $\mathbb{R}^m$  における区分的線形曲線 (折れ線) が与えられたものとする．この区分的線形曲線は  $(n+1)$  個の折れ点  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  と方向を表すベクトル  $\mathbf{x}_{+\infty}, \mathbf{x}_{-\infty}$  により定義されている．このような区分的線形曲線は  $-\infty$  から  $+\infty$  までの値をとるパラメータ  $\lambda$  を用いて，次式で表すことができる [1]．

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{-\infty} \cdot \lambda^- + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \lambda^+ \\ & + \sum_{k=2}^n (\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2}) \cdot (\lambda - k + 1)^+ \\ & + (\mathbf{x}_{+\infty} - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}) \cdot (\lambda - n)^+ \end{aligned} \quad (1)$$

この場合，図 1 に示すように区分的線形曲線の折れ点には  $\lambda$  の整数値が割り当てられる．ここで補助変数

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda - i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i^+ - \lambda_i^- &= \lambda^+ - \lambda^- - i, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

を導入すると，式 (1) は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{-\infty} \cdot \lambda^- + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \lambda^+ \\ & + \sum_{k=2}^n (\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2}) \cdot \lambda_{k-1}^+ \\ & + (\mathbf{x}_{+\infty} - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}) \cdot \lambda_n^+ \\ \lambda_i^+ - \lambda_i^- &= \lambda^+ - \lambda^- - i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^+, \lambda^-, \lambda_i^+, \lambda_i^- &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^+ \cdot \lambda^- &= 0, \quad \lambda_i^+ \cdot \lambda_i^- = 0, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) を区分的線形抵抗回路の混合方程式に代入して整理

(注1): 文献 [1] は 1990 年の IEEE Trans. Circuits and Systems の Guillemin Cauer Best Paper Award 受賞論文である．

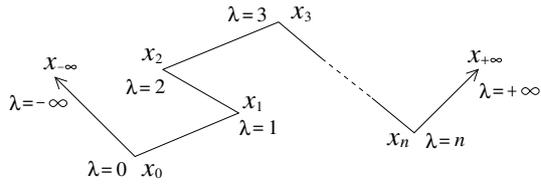


図1  $\mathbb{R}^m$  における区分的線形曲線

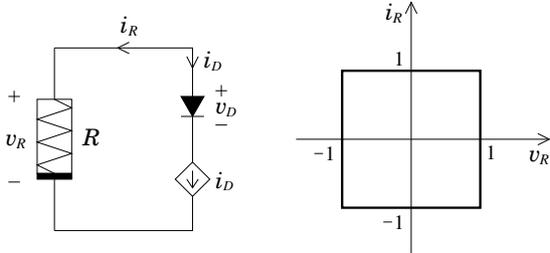


図2 例題1の回路と区分的線形抵抗  $R$  の電圧-電流特性

すると、次のような形の一般化線形相補性問題が得られる [1].

$$\begin{aligned} Mw + Nz &= q \cdot \alpha \\ w, z &\geq 0, \quad \alpha \in \{0, 1\} \\ w^T \cdot z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  と  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  は定数行列、 $q \in \mathbb{R}^m$  は定数ベクトル、 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$  と  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$  は変数ベクトル、 $\alpha$  は 0-1 変数である。変数  $w, z$  は式 (3) の  $(\lambda^-, \lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-)^T$  または  $(\lambda^+, \lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)^T$  のいずれかが対応する。

### 3. 整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析

#### 3.1 提案手法

本章では整数計画法を用いて一般化線形相補性問題 (4) の解集合を導出する方法を提案する。

まず、式 (4) を制約条件とする混合整数計画問題を考える。式 (4) の第 3 式の相補性条件  $w^T \cdot z = 0$  はそのままでは制約式として扱うことができない。そこで  $w^T \cdot z = 0$  を以下のように 0-1 変数  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を用いた線形不等式に置き換える。

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_i \leq Lu_i \\ 0 &\leq z_i \leq L(1 - u_i) \\ u_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $L$  は十分に大きな正の定数とする。式 (5) は 0-1 変数  $u_i$  によって  $w_i, z_i$  のどちらか一方 (または両方) が

表1 例題1における式(6)の解

|               | 1 | 2   | 3   | 4 | 5 | 6   | 7   | 8   |
|---------------|---|-----|-----|---|---|-----|-----|-----|
| $\lambda^+$   | 0 | 0.5 | 2.5 | 3 | 4 | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_1^+$ | 0 | 0   | 1.5 | 2 | 3 | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_2^+$ | 0 | 0   | 0.5 | 1 | 2 | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_3^+$ | 0 | 0   | 0   | 0 | 1 | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_4^+$ | 0 | 0   | 0   | 0 | 0 | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_D^+$ | 1 | 0   | 0   | 1 | 1 | 0   | 0   | 0   |
| $\lambda^-$   | 0 | 0   | 0   | 0 | 0 | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_1^-$ | 1 | 0.5 | 0   | 0 | 0 | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_2^-$ | 2 | 1.5 | 0   | 0 | 0 | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_3^-$ | 3 | 2.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_4^-$ | 4 | 3.5 | 1.5 | 1 | 0 | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_D^-$ | 0 | 0   | 0   | 0 | 0 | 100 | 0   | 0   |
| $\alpha$      | 1 | 1   | 1   | 1 | 1 | 0   | 0   | 0   |

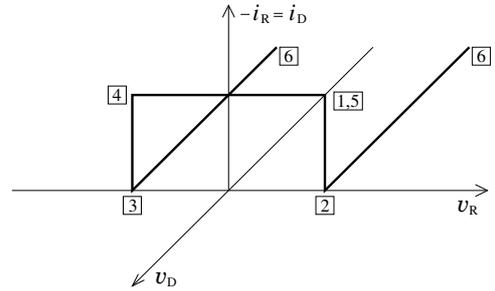


図3 例題1の回路の完全解

0 となる相補性条件を表している。式 (5) より式 (4) は次のような混合整数計画問題で記述される。

最大化： (任意の定数)

制約条件：  $Mw + Nz = q \cdot \alpha$

$$0 \leq w_i \leq Lu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq z_i \leq L(1 - u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_i, \alpha \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(6)

式 (6) の制約条件を満たす解は式 (4) を満たすため、式 (6) を解くことにより区分的線形抵抗回路の完全解析を行うことができる。

本論文では、式 (6) を解くための整数計画ソルバーとして、現時点で最も高速な商用ソフトウェアの一つである CPLEX を用いることを考える<sup>(注2)</sup>。CPLEX を用いることの大きな利点は、CPLEX には解プールという機能があり、この機能を利用することによってより簡単な全探索が可能になることである<sup>(注3)</sup>。解プールの機能を用いて混合整数計画問題 (6) を CPLEX で解くと、式 (6) の制

(注2): 本論文では CPLEX として投稿時点の最新版である CPLEX 12.5 を想定する [4].

(注3): 非商用ソフトウェアの SCIP にも同様の機能がある。

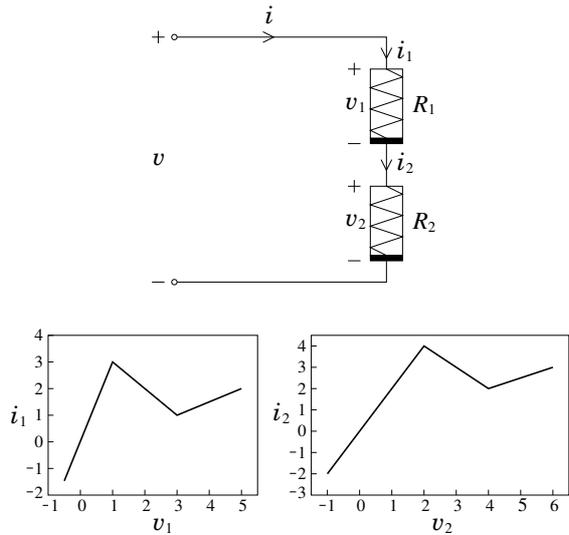


図4 例題2の回路と区分的線形抵抗  $R_1, R_2$  の電圧-電流特性

約条件を満たすすべての解を求めることができる。

### 3.2 隣接性の判定

本節では整数計画問題を解くことにより隣接性の判定を行う方法を提案する。ここで式(6)を解いた結果  $K$  個の解(端点)が得られたものとし、その  $k$  番目の解において  $w_i > 0$  となる添え字の集合を  $W_k$ ,  $z_i > 0$  となる添え字の集合を  $Z_k$  とする。また  $W_k, Z_k$  の要素数を  $|W_k|, |Z_k|$  で表す。このとき、次のような整数計画問題を CPLEX の解プールを用いて解くことにより、どの解とどの解が隣接しているかを判別することができる。

最大化： (任意の定数)

$$\begin{aligned}
 \text{制約条件：} \quad & \sum_{i \in W_k} \mu_i + \sum_{i \in Z_k} \nu_i \geq (|W_k| + |Z_k|) \cdot \rho_k, \\
 & \mu_i + \nu_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{k=1}^K \rho_k = 2 \\
 & \mu_i, \nu_i, \rho_k \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad \quad \quad k = 1, 2, \dots, K
 \end{aligned} \tag{7}$$

この問題の変数  $(\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n, \rho_1, \dots, \rho_K)^T \in \mathbb{R}^{2n+K}$  はすべて 0-1 変数である。

解  $p$  と解  $q$  が隣接する場合は式(7)は  $\rho_p = 1, \rho_q = 1$  となる解をもち、隣接しない場合は  $\rho_p = 1, \rho_q = 0$  となる解をもたない。したがって CPLEX の解プールを用い

表2 例題2における式(6)の解

|               | 1     | 2 | 3    | 4    | 5   | 6   | 7   | 8   | 9 | 10   | 11  |
|---------------|-------|---|------|------|-----|-----|-----|-----|---|------|-----|
| $i^-$         | 100   | 0 | 0    | 0    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0 | 0    | 0   |
| $v^-$         | 83.3  | 0 | 0    | 0    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0 | 0    | 0   |
| $\lambda^-$   | 33.3  | 1 | 0    | 0    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0 | 0.33 | 0   |
| $\lambda_1^-$ | 33.3  | 2 | 1    | 0    | 0   | 0   | 0   | 0.6 | 1 | 1.33 | 1   |
| $\eta_1^-$    | 25    | 1 | 0.25 | 0.88 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0 | 0    | 0   |
| $\eta_2^-$    | 25    | 2 | 1.25 | 1.88 | 1   | 0   | 0   | 0   | 0 | 0    | 0.5 |
| $i^+$         | 0     | 0 | 3    | 0.5  | 4   | 2   | 25  | 2   | 3 | 2    | 3   |
| $v^+$         | 0     | 0 | 2.5  | 3.25 | 12  | 10  | 100 | 5.8 | 7 | 4.67 | 4   |
| $\lambda^+$   | 0     | 0 | 0    | 1    | 4.5 | 2.5 | 25  | 0.4 | 0 | 0    | 0   |
| $\lambda_1^+$ | 0     | 0 | 0    | 0    | 3.5 | 1.5 | 25  | 0   | 0 | 0    | 0   |
| $\eta_1^+$    | 0     | 0 | 0    | 0    | 0   | 1   | 25  | 1   | 2 | 1    | 0.5 |
| $\eta_2^+$    | 0     | 0 | 0    | 0    | 0   | 0   | 25  | 0   | 1 | 0    | 0   |
| $\alpha$      | 0     | 1 | 1    | 1    | 1   | 1   | 0   | 1   | 1 | 1    | 1   |
| $i$           | -100  | 0 | 3    | 0.5  | 4   | 2   | 25  | 2   | 3 | 2    | 3   |
| $v$           | -83.3 | 0 | 2.5  | 3.25 | 12  | 10  | 100 | 5.8 | 7 | 4.67 | 4   |

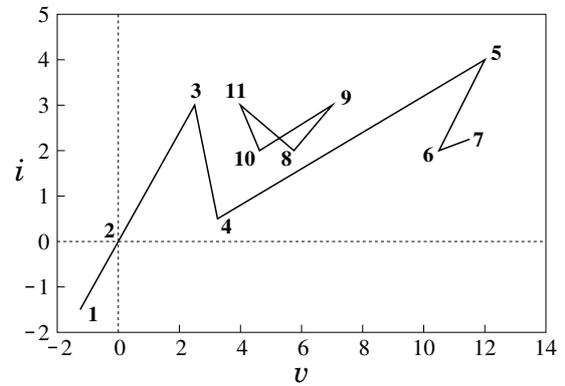


図5 例題2の回路の駆動点特性

て式(7)の制約条件を満たすすべての解を求めることにより、どの解とどの解が隣接しているかを判定することができる。

### 4. 数値例

[例題1] 図2のような区分的線形抵抗回路を考える。この回路に対して式(6)を解いた結果、表1に示すような8個の解が得られた。またこれらの解に対して式(7)を解いた結果、解番号1-2, 1-7, 2-6, 3-4, 3-6, 4-5, 5-8, 6-7, 6-8が cross-complementarity 条件を満たし隣接していることがわかった。これらの結果より、図3に示すような完全解が得られる。

[例題2] 図4に示すようなトンネルダイオードを直列接続した1ポート回路を考える。この回路に対して式(6)を解いた結果、表2のような解が得られた。これらの解に対して式(7)を解いた結果、解番号1-2-3-4-5-6-7と8-9-10-11-8が隣接していることがわかった。これらの結果より、図5に示すような駆動点特性が得られる。

[例題3] 図6に示すような1ポート回路に対して式(6)

表 3 例題 3 における式 (6) の解

|               | 1a | 1b  | 2 | 3   | 4  | 5a  | 5b | 6  | 7   | 8  | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  |
|---------------|----|-----|---|-----|----|-----|----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i^+$         | 0  | 0   | 1 | 1   | 1  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 100 | 0   | 0   | 0   |
| $v^+$         | 1  | 1   | 1 | 0   | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 1  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $\lambda^+$   | 0  | 0.5 | 1 | 1   | 1  | 0.5 | 1  | 0  | 0   | 0  | 0.5 | 0   | 0   | 100 | 0   |
| $\lambda_1^+$ | 0  | 0   | 0 | 0   | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0   | 0   | 100 | 0   |
| $\eta^+$      | 0  | 0   | 0 | 0.5 | 1  | 1   | 2  | 1  | 0.5 | 0  | 0.5 | 0   | 100 | 0   | 0   |
| $\eta_1^+$    | 0  | 0   | 0 | 0   | 0  | 0   | 1  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0   | 100 | 0   | 0   |
| $i^-$         | 0  | 0   | 0 | 0   | 0  | 0   | 0  | 1  | 1   | 1  | 0   | 0   | 100 | 0   | 0   |
| $v^-$         | 0  | 0   | 0 | 0   | 1  | 1   | 1  | 1  | 0   | 0  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $\lambda^-$   | 0  | 0   | 0 | 0   | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0   | 0   | 0   | 100 |
| $\lambda_1^-$ | 1  | 0.5 | 0 | 0   | 0  | 0.5 | 0  | 1  | 1   | 1  | 0.5 | 0   | 0   | 0   | 100 |
| $\eta^-$      | 1  | 0   | 0 | 0   | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 100 | 0   | 0   | 0   |
| $\eta_1^-$    | 2  | 1   | 1 | 0.5 | 0  | 0   | 0  | 0  | 0.5 | 1  | 0.5 | 100 | 0   | 0   | 0   |
| $\alpha$      | 1  | 1   | 1 | 1   | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| $i$           | 0  | 0   | 1 | 1   | 1  | 0   | 0  | -1 | -1  | -1 | 0   | 1   | -1  | 0   | 0   |
| $v$           | 1  | 1   | 1 | 0   | -1 | -1  | -1 | -1 | 0   | 0  | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

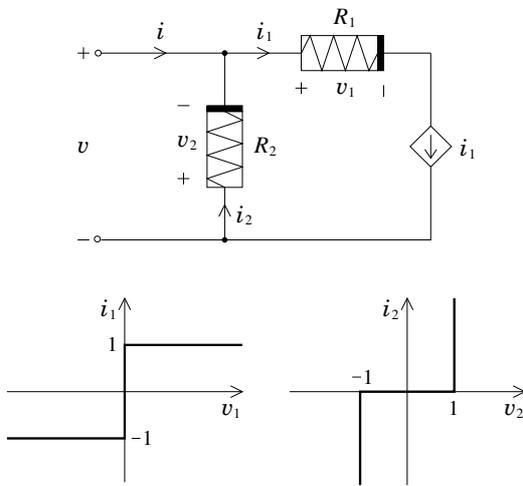


図 6 例題 3 の回路と区分的線形抵抗  $R_1$ ,  $R_2$  の電圧-電流特性

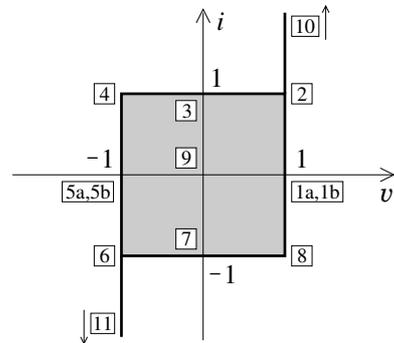


図 7 例題 3 の回路の駆動点特性

文献 (下線は研究業績)

- [1] L. Vandenberghe, B.L. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity program applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no.11, pp.1382-1391, Nov. 1989.
- [2] B. De Moor, L. Vandenberghe and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions," Mathematical Programming, vol.57, no.1-3, pp.415-426, May 1992.
- [3] 茨木俊秀, 福島雅夫, FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, 東京, 1991.
- [4] IBM, IBM ILOG CPLEX V12.1, User's Manual for CPLEX, 2009.
- [5] SCIP (Solving Constraint Integer Programs); <http://scip.zib.de/>
- [6] 山村清隆, 前田礼維, 加藤弘之, "一般化線形相補性理論と整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 電子情報通信学会論文誌 (A), vol.J97-A, no.3, March 2014.
- [7] 前田礼維, 加藤弘之, 山村清隆, "一般化線形相補性理論と混合整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP2012-80, pp.23-28, Nov. 2012.
- [8] 高木謙吾, 滝裕至, 前田礼維, 山村清隆, "整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 2013 年電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, A-2-3, Sept. 2013.

を解いた結果, 表 3 のような解が得られた. これらの解に対して式 (7) を解いた結果, 解番号 1ab-2, 1ab-8, 2-3, 2-10, 3-4, 4-5ab, 5ab-6, 6-7, 6-11, 7-8, 1b-9, 2-9, 3-9, 4-9, 5a-9, 6-9, 7-9, 8-9 が隣接していることがわかった. これらの結果より, 図 7 に示すような駆動点特性が得られる.

5. む す び

本論文では, 区分的線形抵抗回路を一般化線形相補性問題で記述し, それを混合整数計画問題に定式化して既存の整数計画ソルバーで解くことにより, 複雑な形状の解集合を簡単に求められることを示した.

謝辞 本研究を行うにあたり, 多大なる御指導を賜りましたが山村清隆教授に心より感謝の意を表します. また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します.