

# 一般化線形相補性理論と整数計画法を用いた 区分的線形抵抗回路の完全解析に関する研究

A Study on Complete Analysis of Piecewise-Linear Resistive Circuits

Using the Generalized Linear Complementarity Theory and Integer Programming

電気電子情報通信工学専攻 高木 謙吾

Kengo TAKAKI

## 1. ま え が き

区分的線形抵抗回路の解析では、非常に複雑な形状の解集合をもつ回路を扱うことがある [1]。例えば複数の解をもつ回路、無限個の解をもつ回路、非有界な解集合をもつ回路、特性曲線が多角形などの有界平面を含む回路、複数の特性曲線をもつ回路などである。

このような複雑な形状の解集合をもつ回路のすべての解を求めることを、文献 [1] にならって、完全解析 (complete analysis) と呼ぶことにする。

完全解析は、ニュートン法、ホモトピー法、区間解析などの方法で対処することはできない。これに対し、文献 [1] では区分的線形回路の解析を一般化線形相補性問題に定式化し、それを解くことによって完全解析を実現する方法が提案されている。しかし文献 [1] のアルゴリズムは理論が難しいうえに、インプリメントの際にかなり複雑なプログラミングや専門的知識を必要とする。そのため文献 [1] の方法は、初心者や非専門家にとっては実装容易性に欠ける、かなり敷居の高い方法となっている。これに対し本研究室では一般化線形相補性問題を等価な混合整数計画問題に定式化し、既存の整数計画ソルバーを使用することによって、誰でも簡単に完全解析を行う方法を提案した。 [7]

ところで最近、商用ソルバーほどコストをかけずに回路シミュレーションを行いたい、変数分離されていない混合方程式を解きたいなどという要望が出ている。

そこで本論文では、知名度や普及率が高く、低予算で手に入る Excel を用いて区分的線形抵抗回路や非線形問題を誰でも簡単にシミュレーションする方法を提案する。

## 2. 区分的線形抵抗回路の一般化線形相補性問題による定式化

図 1 に示すような  $\mathbb{R}^m$  における区分的線形曲線 (折れ線) が与えられたものとする。この区分的線形曲線は  $(n+1)$  個の折れ点  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  と方向を表すベクトル  $\mathbf{x}_{+\infty}, \mathbf{x}_{-\infty}$  により定義されている。このような区分的線形曲線は  $-\infty$  から  $+\infty$  までの値をとるパラメータ  $\lambda$  を用いて、次式で表すことができる [1]。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{-\infty} \cdot \lambda^- + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \lambda^+ \\ & + \sum_{k=2}^n (\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2}) \cdot (\lambda - k + 1)^+ \\ & + (\mathbf{x}_{+\infty} - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}) \cdot (\lambda - n)^+ \end{aligned} \quad (1)$$

この場合、図 1 に示すように区分的線形曲線の折れ点には  $\lambda$  の整数値が割り当てられる。ここで補助変数

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda - i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i^+ - \lambda_i^- &= \lambda^+ - \lambda^- - i, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

を導入すると、式 (1) は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{-\infty} \cdot \lambda^- + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \lambda^+ \\ & + \sum_{k=2}^n (\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2}) \cdot \lambda_{k-1}^+ \\ & + (\mathbf{x}_{+\infty} - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}) \cdot \lambda_n^+ \\ \lambda_i^+ - \lambda_i^- &= \lambda^+ - \lambda^- - i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^+, \lambda^-, \lambda_i^+, \lambda_i^- &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda^+ \cdot \lambda^- &= 0, \quad \lambda_i^+ \cdot \lambda_i^- = 0, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

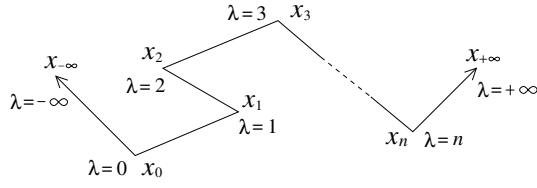


図1  $\mathbb{R}^m$  における区分的線形曲線

式 (3) を区分的線形抵抗回路の混合方程式に代入して整理すると、次のような形の一般化線形相補性問題が得られる [1] .

$$\begin{aligned} Mw + Nz &= q \cdot \alpha \\ w, z &\geq 0, \quad \alpha \in \{0, 1\} \\ w^T \cdot z &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  と  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  は定数行列、 $q \in \mathbb{R}^m$  は定数ベクトル、 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$  と  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$  は変数ベクトル、 $\alpha$  は 0-1 変数である。変数  $w, z$  は式 (3) の  $(\lambda^-, \lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-)^T$  または  $(\lambda^+, \lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)^T$  のいずれかが対応する。

### 3. 整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析

#### 3.1 提案手法

本章では整数計画法を用いて一般化線形相補性問題 (4) の解集合を導出する方法を提案する。

まず、式 (4) を制約条件とする混合整数計画問題を考える。式 (4) の第 3 式の相補性条件  $w^T \cdot z = 0$  はそのままでは制約式として扱うことができない。そこで  $w^T \cdot z = 0$  を以下のように 0-1 変数  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を用いた線形不等式に置き換える。

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_i \leq Lu_i \\ 0 &\leq z_i \leq L(1 - u_i) \\ u_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $L$  は十分に大きな正の定数とする。式 (5) は 0-1 変数  $u_i$  によって  $w_i, z_i$  のどちらか一方 (または両方) が 0 となる相補性条件を表している。式 (5) より式 (4) は式 (6) のような混合整数計画問題で記述される。式 (6) の制約条件を満たす解は式 (4) を満たすため、式 (6) を解くことにより区分的線形抵抗回路の完全解析を行うことができる。

最大化： (任意の定数)

制約条件：  $Mw + Nz = q \cdot \alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_i \leq Lu_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 &\leq z_i \leq L(1 - u_i), & i = 1, 2, \dots, n \\ u_i, \alpha &\in \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

本論文では、式 (6) を解くための整数計画ソルバーとして、Excel ソルバーを用いることを考える。Excel ソルバーは汎用性が高く、また 200 変数レベルの問題を解く事ができ、ちょっと回路シミュレーションをしてみようという場合に最適である。また、日本語のマニュアルがあり扱いやすく、表計算ソフトとしても扱えるため、データの取り扱いが簡単に行えるといった特徴がある。

#### 3.2 隣接性の判定

本節では整数計画問題を解くことにより隣接性の判定を行う方法を提案する。ここで式 (6) を解いた結果  $K$  個の解 (端点) が得られたものとし、その  $k$  番目の解において  $w_i > 0$  となる添え字の集合を  $W_k$ 、 $z_i > 0$  となる添え字の集合を  $Z_k$  とする。また  $W_k, Z_k$  の要素数を  $|W_k|, |Z_k|$  で表す。このとき、次のような整数計画問題を Excel ソルバーを用いることにより、どの解とどの解が隣接しているかを判別することができる。

最大化： (任意の定数)

$$\begin{aligned} \text{制約条件：} \quad & \sum_{i \in W_k} \mu_i + \sum_{i \in Z_k} \nu_i \geq (|W_k| + |Z_k|) \cdot \rho_k, \\ & \mu_i + \nu_i \leq 1, \\ & \sum_{k=1}^K \rho_k = 2 \\ & \mu_i, \nu_i, \rho_k \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} & k = 1, 2, \dots, K \\ & i = 1, 2, \dots, n \\ & k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (7)$$

#### 3.3 平面解

本節では  $n$  次元単体について単体の内部が全て解である証明を行う。 $n$  次元の直方体

$$R = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (8)$$

を考える。まず集合  $\Pi$  を  $\{1, 2, \dots, n\}$  の順列の集まりとする。このとき、 $\Pi$  の要素  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  を一つ定

めると、それに対応して次のような  $n + 1$  個の点を頂点とする単体が定義される。

$$v^0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

$$v^i = v^{i-1} + (b_{\pi_i} - a_{\pi_i}) e^{\pi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

ただし、 $e^i$  は第  $i$  要素が 1 で他の全ての要素が 0 である  $n$  次元ベクトルとする。次に  $n$  次元単体上の任意の点  $x$  を考えると、重心座標  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  により

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v^i \quad (10)$$

で表わす事が出来る。ここで  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  は総和が 1 となるような非負の実数、すなわち

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (11)$$

を満たす実数とする。 $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, n)$  のうち一つだけが 0 なら、 $x$  は単体の側面上の点となる。また  $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, n)$  のうち一つだけが 1 で他が 0 なら、 $x$  は単体の頂点となる。また、式 (10)、(11) は

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^0 & v^1 & \dots & v^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \lambda \quad (12)$$

と書く事が出来るので、単体上の点  $x$  と重心座標  $\lambda$  は 1 対 1 の線形対応であることがわかる。以上より頂点  $v^i$  と任意の点  $x$  の cross-complementary を証明すれば良い。任意の点  $x$  上の解を  $v^x$  とする。 $n$  次元における  $v^x$  の cross-complementarity 条件については、各頂点に重み計数  $\lambda$  をかけたもの (式 (12)) となるため、 $v^x$  は各頂点とそれぞれ cross-complementarity 条件を満たす (これは二次元平面上で考えれば明確である)。ゆえに  $v^x$  と、ある頂点  $i$  は  $(w^i)^T \cdot z^x = (w^x)^T \cdot z^i = 0$  となる。これは全ての頂点に対し成立する。以上より  $n$  次元平面でも成立する。

#### 4. 数 値 例

[例題 1] 図 2 に示すようなトンネルダイオードを直列接続した 1 ポート回路を考える。この回路に対して式 (6) を解いた結果、表 1 のような解が得られた。これらの解に対して式 (7) を解いた結果、解番号 1-2-3-4-5-6-7 と 8-9-

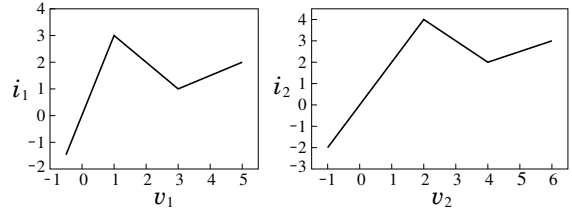
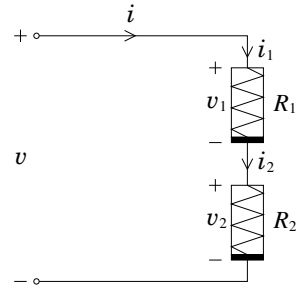


図 2 例題 1 の回路と区分的線形抵抗  $R_1, R_2$  の電圧-電流特性

表 1 例題 1 における式 (6) の解

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$i^-$	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v^-$	83.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda^-$	33.3	1	0	0	0	0	0	0	0	0.33	0
$\lambda_1^-$	33.3	2	1	0	0	0	0	0.6	1	1.33	1
$\eta_1^-$	25	1	0.25	0.88	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_1^+$	25	2	1.25	1.88	1	0	0	0	0	0	0.5
$i^+$	0	0	3	0.5	4	2	25	2	3	2	3
$v^+$	0	0	2.5	3.25	12	10	100	5.8	7	4.67	4
$\lambda^+$	0	0	0	1	4.5	2.5	25	0.4	0	0	0
$\lambda_1^+$	0	0	0	0	3.5	1.5	25	0	0	0	0
$\eta_1^+$	0	0	0	0	0	1	25	1	2	1	0.5
$\eta_1^+$	0	0	0	0	0	0	25	0	1	0	0
$\alpha$	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$i$	-100	0	3	0.5	4	2	25	2	3	2	3
$v$	-83.3	0	2.5	3.25	12	10	100	5.8	7	4.67	4

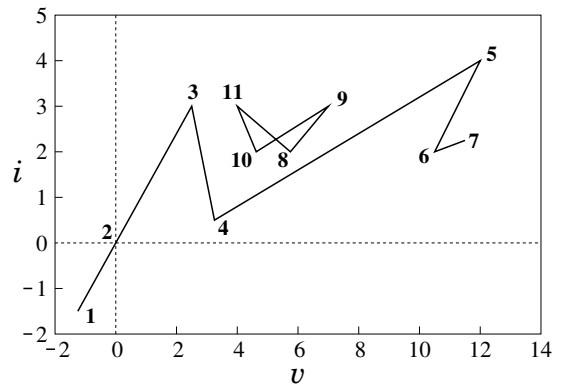


図 3 例題 1 の回路の駆動点特性

10-11-8 が隣接していることがわかった。これらの結果より、図 3 に示すような駆動点特性が得られる。

[例題 2] 図 4 に示すような 1 ポート回路に対して式 (6) を解いた結果、表 2 のような解が得られた。これらの解に

表 2 例題 2 における式 (6) の解

	1a	1b	2	3	4	5a	5b	6	7	8	9	10	11	12	13
$i^+$	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0
$v^+$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\lambda^+$	0	0.5	1	1	1	0.5	1	0	0	0	0.5	0	0	100	0
$\lambda_1^+$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0
$\eta^+$	0	0	0	0.5	1	1	2	1	0.5	0	0.5	0	100	0	0
$\eta_1^+$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100	0	0
$i^-$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	100	0	0
$v^-$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
$\lambda_1^-$	1	0.5	0	0	0	0.5	0	1	1	1	0.5	0	0	0	100
$\eta^-$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0
$\eta_1^-$	2	1	1	0.5	0	0	0	0	0.5	1	0.5	100	0	0	0
$\alpha$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$i$	0	0	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	1	-1	0	0
$v$	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0

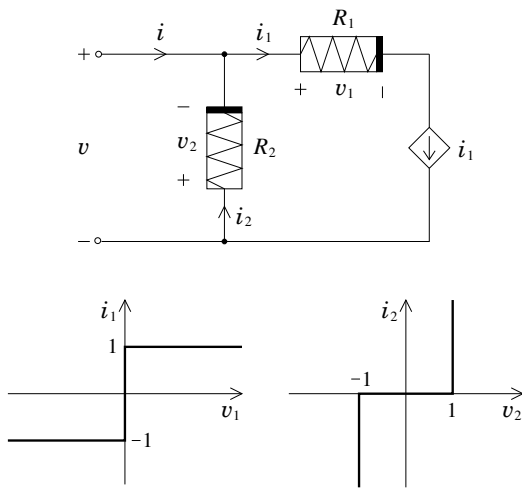


図 4 例題 3 の回路と区分的線形抵抗  $R_1$ ,  $R_2$  の電圧-電流特性

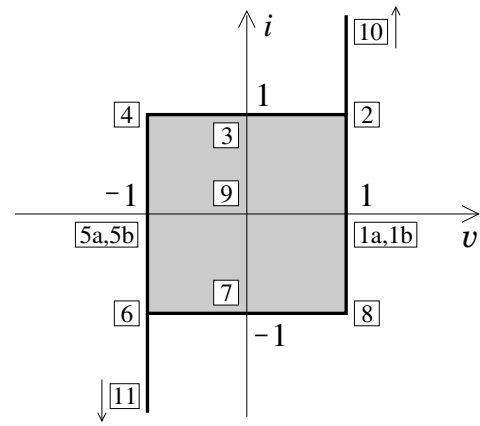


図 5 例題 3 の回路の駆動点特性

対して式 (7) を解いた結果, 解番号 1a-2,2-9,1a-8,1b-8,1b-9,7-8,8-9,1a-1b,1b-3,1b-7,3-4,4-5b,4-5a,4-9,3-5a,3-9,5b-6,5a-5b,6-7,5a-6,6-9,5a-7,7-9,5a-9,2-3 が隣接していることがわかった. これらの結果より, 図 5 に示すような駆動点特性が得られる.

## 5. むすび

本論文では, 区分的線形抵抗回路を一般化線形相補性問題で記述し, それを混合整数計画問題に定式化して Excel ソルバーで解くことにより, 複雑な形状の解集合を簡単に求められることを示した.

謝辞 本研究を行うにあたり, 多大なる御指導を賜りました山村清隆教授に心より感謝の意を表します. また多くの御協力を頂いた研究室の皆様にも感謝致します.

## 文献 (下線は研究業績)

- [1] L. Vandenberghe, B.L. De Moor, and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity program applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.36, no.11, pp.1382-1391, Nov. 1989.
- [2] B. De Moor, L. Vandenberghe and J. Vandewalle, "The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions," Mathematical Programming, vol.57, no.1-3, pp.415-426, May 1992.
- [3] 茨木俊秀, 福島雅夫, FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, 東京, 1991.
- [4] IBM, IBM ILOG CPLEX V12.1, User's Manual for CPLEX, 2009.
- [5] SCIP (Solving Constraint Integer Programs); <http://scip.zib.de/>
- [6] 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎, Excel で学ぶ OR, オーム社, 東京, 2011.
- [7] 山村清隆, 前田礼維, 加藤弘之, "一般化線形相補性理論と整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 電子情報通信学会論文誌 (A), vol.J97-A, no.3, March 2014.
- [8] 高木謙吾, 滝裕至, 前田礼維, 山村清隆, "整数計画法を用いた区分的線形抵抗回路の完全解析," 2013 年電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, A-2-3, Sept. 2013.