符号付き超離散化によるq-パンルヴェ第二方程式の解析
Analysis of q-Painleve II equation by ultradiscretization with parity variables

数学専攻　五十嵐 光
IGARASHI, Hikaru

1 はじめに

超離散化とは, 与えられた差分方程式を max 演算, 和, 差で表される区分線形方程式に変換する極限操作であり, 超離散化によって得られる方程式を超離散方程式という. 特徴として, 超離散方程式のパラメータや初期値を整数値に制限すれば従属変数も整数値を保つ. 詳しい手続きの方法は後述するが, 通常の超離散化では負の量や減算を扱うときに『負の問題』と呼ばれる問題が発生する. これを克服するための手段の一つとして符号付き超離散化がある (薩摩らによる). 本発表では, 符号付き超離散化を通して q-パンルヴェ第二方程式及び符号付き超離散化した方程式について, 研究して得られたいくつかの結果について紹介する.

2 超離散化と符号付き超離散化

次の差分方程式を例に, 超離散化と符号付き超離散化の違いと手続きの仕方について説明する.

$$x_{n+1} = ax_n + b. \tag{1}$$

通常の超離散化では, $x_n = e^{X_n/\varepsilon}, a = e^{A/\varepsilon}, b = e^{B/\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ と変換して両辺に $\varepsilon \log$ をとり

$$X_{n+1} = \varepsilon \log(e^{(A+X_n)/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon})$$

とする. $\varepsilon \to +0$ として極限をとると, 超離散方程式

$$X_{n+1} = \max[A + X_n, B] \tag{2}$$

を得る. ここで, 超離散化において重要な極限公式 (超離散極限): $\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max[A, B]$ を使った. このように差分方程式から超離散方程式を得られるが, この方法には問題点が 2 つある. 1 つは $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ 型の変換は $x_n > 0$ でなければならないこと. もう 1 つは差の極限: $\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} - e^{B/\varepsilon})$ は $A \le B$ のときの評価に困難が生じることである. このような負の量や減算を扱うときに現れる『負の問題』を克服するための手段の一つとして, 符号付き超離散化がある [3, 4, 5, 6]. (1) に対して符号付き超離散化を行う. まず, 関数 s, S を

$$s(\xi) := \begin{cases} 1 & (\xi = +1) \\ 0 & (\xi = -1) \end{cases}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 0 & (\xi = +1) \\ -\infty & (\xi = -1) \end{cases}$$

と定義する. S は s の超離散化に対応している. すると,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log(s(\xi)e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max[S(\xi) + A, B]$$

が成り立つ. さらに, 符号変数 $\xi_n \in \{+1, -1\}$ と振幅変数 X_n を $\xi_n = x_n/|x_n|$, $|x_n| = e^{X_n/\varepsilon}$ により導入する. 符号付き超離散化では

$$x_n = \{s(\xi_n) - s(-\xi_n)\}e^{X_n/\varepsilon}$$

と変数変換する. この型の変換は元の変数の符号を保ち, 正負の両方に対応できる. a, b に対しても同様に変換して (1) に代入し, 符号が正になるように移項すると

$$\begin{aligned} &s(\xi_{n+1})e^{X_{n+1}/\varepsilon} + s(-\alpha\xi_n)e^{(A+X_n)/\varepsilon} + s(-\beta)e^{B/\varepsilon} \\ =&s(-\xi_{n+1})e^{X_{n+1}/\varepsilon} + s(\alpha\xi_n)e^{(A+X_n)/\varepsilon} + s(\beta)e^{B/\varepsilon} \end{aligned} \tag{3}$$

となる. (3) の両辺に $\varepsilon\log$ をとり $\varepsilon\to+0$ と極限をとることで, 符号付き超離散方程式

$$\begin{aligned}&\max[X_{n+1}+S(\xi_{n+1}),A+X_n+S(-\alpha\xi_n),B+S(-\beta)]\\=&\max[X_{n+1}+S(-\xi_{n+1}),A+X_n+S(\alpha\xi_n),B+S(\beta)]\end{aligned}\tag{4}$$

を得る. (2) より複雑になっているが, (1) で符号によって移項をするかしないかの場合分けを一つの式で表すことができている. 例えば, (4) は $\xi_{n+1}=+1,\alpha\xi_n=+1,\beta=+1$ のときに (2) になっている. また, 差分方程式 (1) の解を超離散化することによって超離散方程式 (2) の解を求めることができる.

3 q-PII の行列式解の符号付き超離散化

q-PII とは q 差分パンルヴェ第二方程式のことを指し

$$(z(q\tau)z(\tau)+1)(z(\tau)z(q^{-1}\tau)+1)=\frac{a\tau^2z(\tau)}{\tau-z(\tau)}\tag{5}$$

で与えられる. これを符号付き超離散化して得られる符号付き超離散パンルヴェ第二方程式 (p-ud PII) は $a=e^{A/\varepsilon},\tau=q^m(m\in\mathbb{Z}),q=e^{Q/\varepsilon}(Q<0,\varepsilon>0)$ として, 符号変数 $\zeta_m\in\{+1,-1\}$ と振幅変数 Z_m に対して

$$z(q^m)=\{s(\zeta_m)-s(-\zeta_m)\}e^{Z_m/\varepsilon}$$

と変数変換して符号付き超離散化の手続きをすることにより得られ

$$\begin{aligned}&\max[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+S(\zeta_{m+1}\zeta_m\zeta_{m-1}),Z_{m+1}+2Z_m+S(\zeta_{m+1}),2Z_m+Z_{m-1}+S(\zeta_{m-1}),\\&\quad Z_m+S(\zeta_m),Z_m+A+2mQ+S(\zeta_m),Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(-\zeta_{m+1}\zeta_{m-1}),\\&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+S(-\zeta_{m+1}\zeta_m),Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(-\zeta_m\zeta_{m-1})]\\=&\max[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+S(-\zeta_{m+1}\zeta_m\zeta_{m-1}),Z_{m+1}+2Z_m+S(-\zeta_{m+1}),2Z_m+Z_{m-1}+S(-\zeta_{m-1}),\\&\quad Z_m+S(-\zeta_m),Z_m+A+2mQ+S(-\zeta_m),Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(\zeta_{m+1}\zeta_{m-1}),\\&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+S(\zeta_{m+1}\zeta_m),Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(\zeta_m\zeta_{m-1}),mQ]\end{aligned}\tag{6}$$

と表される [2, 3]. q-PII (5) は $a=q^{2N+1}(N\in\mathbb{Z})$ のとき行列式型の特殊解を持ち

$$z^{(N)}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{g^{(N)}(\tau)g^{(N+1)}(q\tau)}{q^Ng^{(N)}(q\tau)g^{(N+1)}(\tau)} & (N\geq 0)\\ \dfrac{g^{(N)}(\tau)g^{(N+1)}(q\tau)}{q^{N+1}g^{(N)}(q\tau)g^{(N+1)}(\tau)} & (N<0)\end{cases},\tag{7}$$

$$g^{(N)}(\tau)=\begin{cases}\det|w(q^{-i+2j-1}\tau)|_{1\leq i,j\leq N} & (N>0)\\ 1 & (N=0)\\ \det|w(q^{i-2j}\tau)|_{1\leq i,j\leq |N|} & (N<0)\end{cases}\tag{8}$$

と表される. ただし, 行列式 $g^{(N)}(\tau)$ の要素 $w(\tau)$ は q-Airy 方程式

$$w(q\tau)-\tau w(\tau)+w(q^{-1}\tau)=0\tag{9}$$

を満たす必要がある [1]. ここでは $\tau=q^m(m\in\mathbb{Z})$ と置いて簡単化を行い, $w(\tau)$ などを $w(m)$ などと書き直す. $w(m)$ は (9) を満たす必要があるが, (9) は qAi 関数, qBi 関数と呼ばれている独立な特殊解を持ち

$$q\mathrm{Ai}(q^m)=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-q)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^2;q^2)_n}(-q)^{mn},\quad q\mathrm{Bi}(q^m)=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-q)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q^2;q^2)_n}(-q)^{mn}\tag{10}$$

と表される. これらは $q\to 0$ のとき

$$a(m):=q\mathrm{Ai}(q^m)\sim\begin{cases}(-1)^{m(m-1)/2} & (m\geq 0)\\ q^{m(m-1)/2} & (m\leq -1)\end{cases},\quad b(m):=q\mathrm{Bi}(q^m)\sim\begin{cases}(-1)^{m(m+1)/2} & (m\geq 0)\\ 2q^{-m(m+1)/2} & (m\leq -1)\end{cases}\tag{11}$$

と評価できる [5]. q-PII の行列式解 (7), (8) を符号付き超離散化することによって p-ud PII (6) の解を求める. 評価式 (11) に対して, $w(m)=a(m)$ または $w(m)=b(m)$ のときの符号付き超離散化は既に調べられている [5]. ここでは新しくそれらの線形結合, つまり q-Airy 方程式の一般解

$$w(m)=c_1a(m)+c_2b(m)\quad (c_1=\alpha e^{A/\varepsilon}, c_2=\beta e^{B/\varepsilon})$$

とする. また簡単のため, $g^{(N)}(m)$ のすべての要素 $w(m)$ に対して, 評価式 (11) の $m\le -1$ のときを考える. つまり $m\le -2N+1$ とする. まず, $N\ge 0$ のときの $g^{(N)}(m)$ の符号付き超離散化について.

命題 1. [2] $m\le -2N+1$ に対して, $g^{(N)}(m)\sim \gamma^{(N)}(m)e^{G^{(N)}(m)/\varepsilon}$ の符号付き超離散化 $(\gamma^{(N)}(m), G^{(N)}(m))$ は

$$(\gamma^{(N)}(m),G^{(N)}(m))=\begin{cases}(\gamma_0^{(N)}(m),G_0^{(N)}(m)) & (B-A<f_1^{(N)}(m)),\\ (\gamma_k^{(N)}(m),G_k^{(N)}(m)) & (f_k^{(N)}(m)\le B-A<f_{k+1}^{(N)}(m)),\\ (\gamma_N^{(N)}(m),G_N^{(N)}(m)) & (f_N^{(N)}(m)\le B-A)\end{cases}$$

で与えられる. ここで, $k=0,1,\dots,N$ に対して

$$\begin{aligned}\gamma_k^{(N)}(m)=&(-1)^{Nk-k(k+1)/2}\alpha^{N-k}\beta^k,\\ G_k^{(N)}(m)=&(N-k)A+kB+[\left(-k+\tfrac{1}{2}N\right)m^2+\{-3k^2+(2N+1)k+\tfrac{N(N-2)}{2}\}m\\ &-\tfrac{8}{3}k^3+\left(2N+\tfrac{3}{2}\right)k^2+\left(-N+\tfrac{1}{6}\right)k+\tfrac{N(N-1)(N-2)}{6}]Q,\\ f_k^{(N)}(m)=&\left\{(m-N+3k-2)^2-(N-k)(N-k+1)\right\}Q.\end{aligned}$$

(7) および命題 1 から $z^{(N)}(m)$ の符号付き超離散化 $(\zeta^{(N)}(m), Z^{(N)}(m))$ も得られるが, m に関して陽的ではない. 書き換えるために m_0, k_0 を導入する. N, A, B, Q を決めると

$$m_0^2Q\le B-A<(m_0+1)^2Q$$

を満たす $m_0\in\mathbb{Z}_{<0}$ が唯一つとれる. この m_0 に対して

$$P_0:=(m_0+1)^2Q,\quad P_j:=\{m_0^2-(N-j+1)(N-j+2)\}Q\quad (j=1,\dots,N+1)$$

として P_j を定めると, $P_{k_0+1}\le B-A<P_{k_0}$ を満たす $k_0\in\{0,1,\dots,N\}$ が唯一つ取れる. このようにして定めた m_0, k_0 により, 次の定理を得る.

定理 1. [2] N, A, B, Q から決まる m_0, k_0 を先ほどのように定める. すると, $m\le -2N-1$ に対して $(\zeta^{(N)}(m), Z^{(N)}(m))$ を次のように書くことができる.

(I) $m\le m_0-2N-1$ のとき

$$(\zeta^{(N)}(m),Z^{(N)}(m))=(+1,(-m-2N-1)Q)\qquad \text{(Bi-type)}.$$

(II) $m_0-2N\le m\le m_0+N-3k_0+1$ のとき ($0\le j\le N-k_0$ または $0\le j\le N-k_0-1$)

$$(\zeta^{(N)}(m),Z^{(N)}(m))=\begin{cases}((-1)^j\alpha\beta, A-B+(m_0^2+m_0-j^2)Q) & (m=m_0-2N+3j),\\ (+1,(m_0+j+1)Q) & (m=m_0-2N+3j+1),\\ ((-1)^j\alpha\beta, B-A-\{m_0^2+m_0-(j+1)^2\}Q) & (m=m_0-2N+3j+2).\end{cases}$$

(III) $m=m_0+N-3k_0+2$ かつ $k_0\ne 0$ のとき

$$(\zeta^{(N)}(m),Z^{(N)}(m))=(-1,(-m_0-N+k_0-1)Q).$$

(IV) $m_0+N-3k_0+3\le m\le m_0+N$ かつ $k_0\ne 0$ のとき ($N-k_0+1\le j\le N$ または $N-k_0+1\le j\le N-1$)

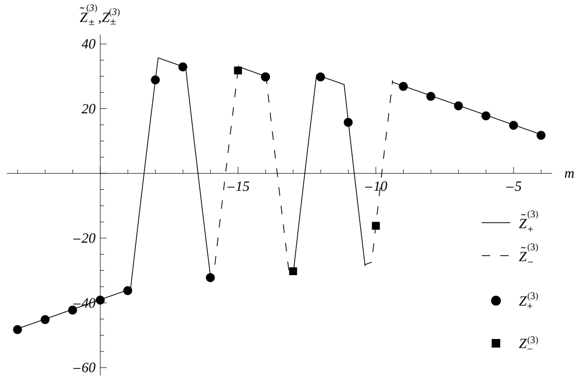
$$(\zeta^{(N)}(m),Z^{(N)}(m))=\begin{cases}(+1,(m_0+j)Q) & (m=m_0-2N+3j),\\ ((-1)^j\alpha\beta, B-A-\{m_0^2-m_0-(j+1)^2\}Q) & (m=m_0-2N+3j+1),\\ ((-1)^{j+1}\alpha\beta, A-B+\{m_0^2-m_0-(j+1)^2\}Q) & (m=m_0-2N+3j+2).\end{cases}$$

(V) $m_0+N+1 \le m \le -2N-1$ のとき

$$(\zeta^{(N)}(m), Z^{(N)}(m)) = (+1, mQ) \qquad \text{(Ai-type)}.$$

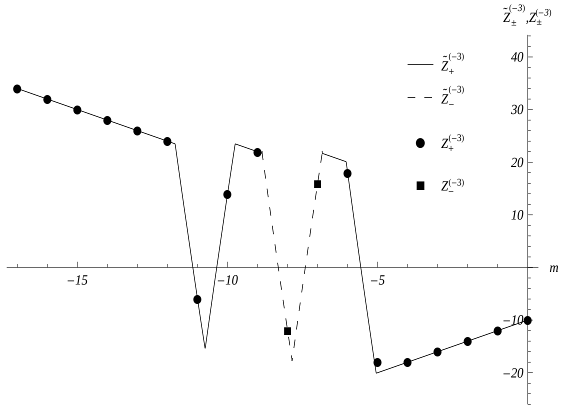
定理 1 の具体的な例を考える．$\alpha=+1, \beta=+1, N=3, A=450, B=25, Q=-3$ とすると $m_0=-12, k_0=2$ となり次のようになる．ここで, 実線, 破線は, (7) を計算した時に符号がそれぞれ正, 負のときの振幅変数を表している．ここでは $\varepsilon=0.1$ としている．丸点, 四角点は定理 1 で符号 $\zeta^{(3)}(m)$ がそれぞれ正, 負のときの振幅変数を表している．定理 1 から計算して得られる $(\zeta^{(N)}(m), Z^{(N)}(m))$ は (7) の様子をよく捉えている．

$$(\zeta^{(3)}(m), Z^{(3)}(m)) = \begin{cases} (+1, 3m+21) & (m \le -19) \\ (+1, 29) & (m=-18) \\ (+1, 33) & (m=-17) \\ (+1, -32) & (m=-16) \\ (-1, 32) & (m=-15) \\ (+1, 30) & (m=-14) \\ (-1, -30) & (m=-13) \\ (+1, 30) & (m=-12) \\ (+1, 16) & (m=-11) \\ (-1, -16) & (m=-10) \\ (+1, -3m) & (-9 \le m \le -1). \end{cases}$$



以上は $N \ge 0$ のときの結果であるが, $N<0$ のときも同様な議論によって定理 1 と似た結果を得る．例えば, $\alpha=+1, \beta=+1, N=-3, A=210, B=20, Q=-2$ とすると $m_0=-10, k_0=1$ となり次のようになる．$N<0$ のときに得られた $(\zeta^{(N)}(m), Z^{(N)}(m))$ も, (7) の様子をよく捉えている．

$$(\zeta^{(-3)}(m), Z^{(-3)}(m)) = \begin{cases} (+1, -2m) & (m \le -13) \\ (+1, 24) & (m=-12) \\ (+1, -6) & (m=-11) \\ (+1, 14) & (m=-10) \\ (+1, 22) & (m=-9) \\ (-1, -12) & (m=-8) \\ (-1, 16) & (m=-7) \\ (+1, 18) & (m=-6) \\ (+1, -18) & (m=-5) \\ (+1, 2m-10) & (-4 \le m \le -1). \end{cases}$$



参考文献

[1] Hamamoto T., Kajiwara K. and Witte N. S., Hypergeometric Solutions to the q-Painlevé Equation of Type $(A_1+A_1')^{(1)}$, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), 84619.

[2] Igarashi H., Isojima S., Takemura K., New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, to appear in *J. Phys. A*, arXiv:1509.05248.

[3] Isojima S., Konno T., Mimura N., Murata M., Satsuma J., Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution, *J. Phys. A* **44** (2011), 175201.

[4] Isojima S., Satsuma J., A class of special solutions for the ultradiscrete Painlevé II equation, *SIGMA* **7** (2011), 074.

[5] Isojima S., Satsuma J., Tokihiro T., Direct ultradiscretization of Ai and Bi functions and special solutions for the Painlevé II equation, *J. Phys. A* **45** (2012), 155203.

[6] Takemura K., Tsutsui T., Ultradiscrete Painlevé VI with Parity Variables, *SIGMA* **9** (2013), 070.