二次元局所体のブラウアー群

西牧　優

概要

完備離散付値体 K の剰余体が局所体であるとき, K を二次元局所体と呼ぶ.
本論文は, 二次元局所体のブラウアー群の構造について, 加藤和也氏の「A generalization of local class field theory by using K-groups.」を参考にしてまとめた総合報告である.
二次元局所体のブラウアー群に対し, 標準的単射準同型

$$\Phi_K : \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Hom}(K^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が存在する. 更に乗法群 K^* にある位相を入れたとき, Φ_K の像は K^* のポントリャーギン双対のねじれ部分 $\mathrm{Hom}_c(K^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{tor}$ と同型となる. 本論文では $\mathrm{ch}(K) = 0$ かつ $\mathrm{ch}(F) = p$ の場合を扱い, Φ_K を構成と単射性の証明を目標とする.

1　準備

1.1　ブラウアー群

可換体 K 上の中心的単純環はウェダバーンの定理により, ある K 上の斜体 D と $n > 0$ が存在して行列環 $M_n(D)$ と同型になる. ここで二つの中心的単純環を行列環の係数環となる斜体が同型であるとき同値とみなすことで, K 上の中心的単純環の集合の商集合 $\mathrm{Br}(K)$ が構成される. この $\mathrm{Br}(K)$ はテンソル積を演算とすることでアーベル群となり, K のブラウアー群と呼ばれる. K のブラウアー群はねじれ群である.
以下 K の分離閉包を K_s で表す. 一般の体 K のブラウアー群について次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{Br}(K) \cong H^2(K, K_s^*)$$

また, K が局所体の場合はブラウアー群について次の標準同型が存在する.

$$\mathrm{inv}_K : \mathrm{Br}(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

したがって次の様に局所体のトレース同型が構成できる.

定理 1.1 (局所体のトレース同型)**.** K を局所体とするとき, 次の同型が成り立つ.

$$\mathrm{tr}_K : H^2(K, K_s^*) \cong \mathrm{Br}(K) \overset{\mathrm{inv}_K}{\cong} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

1.2　二次元局所体のトレース同型

K を標数 0 の二次元局所体, F をその剰余体とし, $\mathrm{ch}(F) = p > 0$ とする.

定理 1.2 (二次元局所体のトレース同型). 二次元局所体のトレース同型と呼ばれる次の標準同型が存在する.

$$\mathrm{tr}_K : H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ただし, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) := \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} \mu_m^{\otimes 2}$ である.

1.3　$K^*/(K^*)^p$ の減少フィルター

体 K が正規離散付値 v_K を持つとき, K の $i\,(\geq 1)$ 次単数群を $U_K^{(i)} := \{x \in K \mid v_K(x-1) \geq i\}$ と定め, $U_K^{(0)} := K^*$ とする. また, $e'_K := pv_K(p)/(p-1)$ と置く.

定理 1.3. K を標数 0 の完備離散付値体, K の剰余体 F の標数を $p > 0$ とし, $\zeta_p \in K$ とする. このとき $F_i := (U_K^{(i)} \cdot K^*)/(K^*)^p$ は $K^*/(K^*)^p$ の減少フィルターであり, F_i/F_{i+1} の構造は次の様になる.

$$F_i/F_{i+1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus F^*/(F^*)^p & (i = 0) \\ F/F^p & (0 < i < e'_K \text{ かつ } p \mid i) \\ F & (0 < i < e'_K \text{ かつ } (p, i) = 1) \\ F/\{x^p - x \mid x \in F\} & (i = e'_K) \\ 0 & (i > e'_K) \end{cases}$$

1.4　$K_2^M(K)/(K_2^M(K))^p$ の減少フィルター

定義 1.4. 体 K の 2 次ミルナー K 群を以下で定める.

$$K_2^M(K) := (K^*)^{\otimes 2} / \langle x \otimes y \mid x + y = 1,\ x, y \neq 1 \rangle$$

以下, $x \otimes y$ の同値類を $\{x, y\}_K$ と表し, 演算を乗法的に表すことにする.

定理 1.5. K を標数 0 の完備離散付値体, K の剰余体 F の標数を $p > 0$ とし, $[F : F^p] = p$, $\zeta_p \in K$ と仮定する. このとき $V_K^{(n)} := \left\{U_K^{(n)}, K^*\right\}_K$ と定義すれば, $G_i := (V_K^{(i)} \cdot K_2^M(K))/K_2^M(K)^p$ は $K_2^M(K)/(K_2^M(K))^p$ の減少フィルターであり, G_i/G_{i+1} の構造は次の定理の通りである.

$$G_i/G_{i+1} \cong \begin{cases} F^*/(F^*)^p & (i = 0) \\ F/F^p & (0 < i < e'_K \text{ かつ } p \mid i) \\ \Omega_F & (0 < i < e'_K \text{ かつ } (p, i) = 1) \\ \Omega_F/(1 - a\gamma)\Omega_F \oplus F/\{x^p - x \mid x \in F\} & (i = e'_K) \\ 0 & (i > e'_K) \end{cases}$$

1.5 ノルム剰余写像

n を K で可逆な自然数とし, $\zeta_n \in K$ と仮定するとき, カップ積を用いて,

$$h'_n : (K^*/(K^*)^n)^{\otimes 2} \cong H^1(K,\mu_n)^{\otimes 2} \overset{\cup}{\to} H^2(K,\mu_n^{\otimes 2}) \underset{by\ \zeta_n\otimes\zeta_n\mapsto\zeta_n}{\cong} H^2(K,\mu_n) \cong \mathrm{Br}(K)_n$$

を得る. 更に h'_n は $x \neq 0, x \neq 1$ となる任意の $x \in K$ に対して次を満たす.

$$h'_n(x \otimes (1-x)) = 0$$

したがってノルム剰余写像と呼ばれる次の写像を得る.

$$h_n : K_2^M(K)/K_2^M(K)^n \to \mathrm{Br}(K)_n$$

定理 1.6. K を標数 0 の二次元局所体, F をその剰余体とし, $\mathrm{ch}(F) = p > 0$ とする. 更に $\zeta_p \in K$ と $[F : F^p] = p$ を仮定するとき, $h_p : K_2^M(K)/K_2^M(K)^p \to \mathrm{Br}(K)_p$ は同型である.

2 二次元局所体のブラウアー群

定理 2.1. K を標数 0 の二次元局所体, F をその剰余体とし, $\mathrm{ch}(F) = p > 0$ とする. このとき, 次の標準的単射準同型が存在する.

$$\Phi_K : \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Hom}(K^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Φ_K の構成. m を任意の自然数とするとき, ペアリング

$$K^*/(K^*)^m \times \mathrm{Br}(K)_m \cong H^1(K,\mu_m) \times H^2(K,\mu_m) \overset{\cup}{\to} H^3(K,\mu_m^{\otimes 2}) \overset{\mathrm{tr}_{m,K}}{\cong} \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

からペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle_K : K^* \otimes \mathrm{Br}(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を得る. このペアリングから Φ_K が得られる. □

Φ_K の単射性の証明の概略. $\mathrm{Br}(K)$ はねじれ群であるから, 位数 n が p と素な元からなる部分と p 準素な部分に分けて考える. $(p,n) = 1$ の場合は比較的容易に分かるので省略する.

n が p 冪の場合は, $n = p$ でかつ $\zeta_p \in K$ の場合に帰着される. このとき定理 1.6 の同型が存在するので, Φ_K が誘導する次の準同型が単射であることを示せばよい.

$$\Phi_{p,K} : K_2^M(K)/(K_2^M(K))^p \overset{h_p}{\cong} \mathrm{Br}(K)_p \to \mathrm{Hom}\left(K^*/(K^*)^p, \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right) \tag{2.2}$$

ここで定理 2.1 の仮定と $\zeta_p \in K$ より定理 1.3 と定理 1.5 が成り立つから, $K^*/(K^*)^p$ の長さ e'_K+1 の減少フィルター F_i と $K_2^M(K)/(K_2^M(K))^p$ の長さ e'_K+1 の減少フィルター G_i が存在して, F_i/F_{i+1} と $G_{e'_K-i}/G_{e'_K-i+1}$ は局所コンパクトアーベル群とその双対群である. 従って (2.2) から誘導されるペアリング

$$\epsilon : K_2^M(K)/(K_2^M(K))^p \times K^*/(K^*)^p \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

から得られる次のペアリングが非退化となることを示せばよい.

$$F_i/F_{i+1} \times G_{e'_K-i}/G_{e'_K-i+1} \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \tag{2.3}$$

(2.3) の非退化性を示すために次の準同型を用いる.

$$\delta : \Omega_F \overset{residue\ map}{\twoheadrightarrow} k \overset{\mathrm{tr}_k}{\to} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

(ただし, Ω_F は F のケーラー微分加群, k は F の剰余体である.)

この準同型を用いて (2.3) は以下の様に記述される.

(1) $i = 0$ のとき,

$$F^*/(F^*)^p \otimes F/\{x^p - x \mid x \in F\} \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z};\ \ x \otimes y \mapsto \delta\left(y\frac{dx}{x}\right)$$

(2) $0 < i < e'_K$ かつ $(p, i) = 1$ のとき,

$$\Omega_F \otimes F \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z};\ \ \omega \otimes x \mapsto -i\delta(x\omega)$$

(3) $0 < i < e'_K$ かつ $p \mid i$ のとき,

$$F/F^p \otimes F/F^p \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z};\ \ x \otimes y \mapsto \delta(xdy)$$

(4) $i = e'_K$ のとき,

$$\Omega_F/(1-\gamma)\Omega_F \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus F/\{x^p - x \mid x \in F\} \otimes F^*/(F^*)^p \to \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z};$$
$$(\omega \otimes 1, x \otimes y) \mapsto \delta(\omega) - \delta\left(x\frac{dy}{y}\right)$$

(ただし γ はカルティエ作用素.)

この記述から (2.3) の非退化性が従い, よって Φ_K の単射性が成り立つ. □