人の歩行による室内塵埃の飛散に関する 3 次元解析

Three-dimensional analysis of the scattering of dust in a room caused by human walk

精密工学専攻　40 号　本多宏輝
Hiroki Honda

1. はじめに

われわれが生活する室内空間には多くの塵埃が存在している．塵埃とは，空気中に浮遊する 100μm 以下の固形粒子のことを指し，土埃や花粉，ダニの死骸などである．これらは室内に生じる気流によって飛散し，人体に悪影響を及ぼす．その例として近年，アレルギー性鼻炎や喘息といった疾患の増加が問題視されており，その原因の一つに塵埃の影響があると言われている．アレルギーの原因となるダニの死骸やホコリといった塵埃は非常に軽いため室内に生じる気流によって空中に浮遊し続けている．これらの塵埃の動きや分布を知ることは快適な生活空間を維持するために重要である．室内に気流を生じさせる要因としては，外気の流入，人の歩行，掃除機の排気などが考えられるが，最も頻度の高い要因は人の歩行であろう．

そこで，本研究では人の歩行が作り出す気流によって床の上に存在する塵埃が飛散する様子の数値シミュレーションを扱う．辻 [1] は，この問題に対して，有限要素法と Fictitious Domain 法を用いた計算方法を提案した．しかし，その計算過程において大規模な連立 1 次代数方程式を組み立てる必要があったことから計算機メモリの制約を受けてしまい，6 畳間程度の空間領域までしか計算の対象にできなかった．さらに，人を 1 個の円柱で表現したため，人の手や足の動きの影響を考慮することができなかった．そこで，本研究では，これらの課題に対して改善策を施し，より完成度の高い計算手法を構築することを目的とする．

2. 基礎方程式

Fig. 1 に示すような直方体の室内を，人が直進歩行する計算モデルを考える．室内の空気を非圧縮性ニュートン流体として，流れは層流と仮定する．このとき，流れの支配方程式は次の非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と連続の方程式である．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (\Omega'\text{内}) \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad (\Omega'\text{内}) \qquad (2)$$

ここに，Ω' は直方体の内部領域から人が占める領域 ω を除いた流体が占める領域を表す．$\mathbf{u}$ は速度，t は時間，p は圧力，Re はレイノルズ数である．領域 Ω' の境界は，部屋の壁 Γ と人体表面 γ である．そこには，次のようなすべりなし境界条件を課す．

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (\Gamma\text{上}) \qquad (3)$$

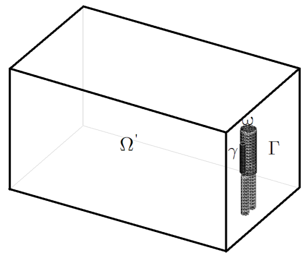


Fig. 1　Computational model

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_B \qquad (\gamma\text{上}) \qquad (4)$$

ここに，$\mathbf{u}_B$ は人の歩行速度である．初期条件として，$t=0$ において，人も室内の空気も静止していると考え，

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{u}_B = \mathbf{0}\ ,\ p = 0 \qquad (5)$$

を与える．

3. 流れの支配方程式の離散化

3.1 Fictitious Domain 法

2 章で設定した計算モデルでは，人の歩行に伴って人体表面境界 γ の位置が時々刻々と変化する．このような移動境界問題を扱う場合，流体領域 Ω' を覆う計算メッシュをその都度作り直す方法を用いるのが一般的であるが，膨大な計算時間と複雑なアルゴリズムを必要とする．そこで，本研究では辻 [1] の研究に倣って Fictitious Domain 法を採用する．この手法は物体が占める領域も流体領域とみなし，人体表面に課される境界条件式 (4) を流れの支配方程式に対する拘束条件として扱う手法である．そのためにラグランジュの未定乗数法が用いられる．Fictitious Domain 法を用いることによって，境界 γ の位置が変わる度に計算メッシュを作り直す必要がなく，効率の良い計算が期待できる．

3.2 弱形式の導出

Fictitious Domain 法に基づいて，式 (1)，(2) に対する弱形式を導き，ラグランジュの未定乗数法に従って拘束条件式 (4) を付加すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}^* d\Omega + \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^* d\Omega \\ &+ \int_\Omega p\nabla\cdot\mathbf{u}^* d\Omega - \frac{1}{Re}\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^* d\Omega \\ &= \int_\gamma \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{u}^* d\gamma\end{aligned} \qquad (6)$$

$$\int_\Omega p^* \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\int_\gamma \boldsymbol{\lambda}^* (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B) d\gamma = \mathbf{0} \tag{8}$$

ここに，Ω は流体領域 Ω' と人が占める領域 ω をあわせた Fig. 1 の直方体の内部領域全域である．また，$\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュの未定乗数，* は重み関数を意味する．

3.3 弱形式の空間方向の離散化

計算領域 Ω を四面体の有限要素を用いて分割する．速度と圧力の節点を Fig. 2 のように定義し，弱形式 (6)，(7) の領域 Ω における体積積分を離散化する．

次に，人体表面を平面の三角形要素で覆い，三角形の 3 頂点を節点として，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\lambda}^*$ の節点値を定義する．三角形内で $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\lambda}^*$ が線形に変化すると仮定して，式 (6)，(8) の境界 γ における表面積分を離散化する．離散化の結果，式 (6)，(7)，(8) は次のようになる．

$$\mathbf{M}\frac{d\mathbf{U}}{dt} + [\mathbf{A}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}]\mathbf{U} - \mathbf{HP} - \mathbf{\Phi\Lambda} = \mathbf{0} \tag{9}$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{10}$$

$$\mathbf{\Psi U} = \mathbf{B} \tag{11}$$

ここに，$\mathbf{U}$ と $\mathbf{P}$ は $\mathbf{u}$，p の節点値を成分とする速度と圧力の全体ベクトルである．$\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュの未定乗数 λ の節点値を成分とする全体ベクトルである．$\mathbf{M}$ は質量行列，$\mathbf{A}$ は移流項，$\mathbf{D}$ は粘性項，$\mathbf{H}$ は圧力項，$\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}$ は，$\boldsymbol{\lambda}$ と $\mathbf{u}$ の項に対する面積座標と体積座標からなる行列の積で求まる行列である．また，$\mathbf{B}$ は人体表面 γ 上での $\mathbf{u}_B$ の節点値を成分とする全体行列と面積座標からなる行列の積によって求まる行列である．$\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

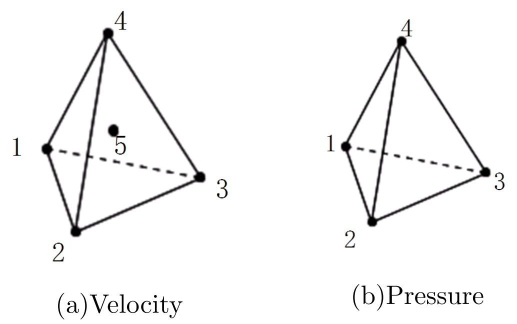


Fig. 2　Finite elements for velocity and pressure

3.4 時間方向の離散化

時間方向の離散化には差分法を用いる．時間方向を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^n = n\Delta t$ と時刻 $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた代表的な区間を考える．そこで，式 (9)，(10)，(11) を時間方向に離散化すると，次式を得る．

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + [\mathbf{A}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{D}]\mathbf{U}^n - \mathbf{HP}^{n+1} - \mathbf{\Phi\Lambda}^{n+1} = \mathbf{0} \tag{12}$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\mathbf{\Psi U}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \tag{14}$$

4. 共役残差法

式 (12)〜(14) を用いて，時刻 t^n の値を知って，時刻 t^{n+1} における値を求めるものとする．辻 (1) は，$\mathbf{U}^{n+1}$ と $\mathbf{P}^{n+1}$ の求解過程を分離してそれぞれを個別に求める Fractional-step 法を用いた．しかし，このとき $\mathbf{P}^{n+1}$ の求解の際に連立 1 次代数方程式を解く必要があり，大規模な行列を計算機メモリ上に格納しなければならなかった．例えば，辻 (1) の行った計算では，約 80000 行 80000 列の行列であった．そのために，メモリの容量制限にかかり，メッシュを細かくしたり，計算領域を拡張することが困難であった．

そこで，本研究ではメモリ使用量の少ない連立 1 次代数方程式の解法である反復法を用いることにする．式 (12)〜(14) を，$\mathbf{U}^{n+1}$，$\mathbf{P}^{n+1}$，$\mathbf{\Lambda}^{n+1}$ を未知量とする連立 1 次代数方程式にまとめると，

$$\mathbf{A}\begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \\ \mathbf{\Lambda}^{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{b} \tag{15}$$

となる．このとき，係数行列 $\mathbf{A}$ が非対称行列になることから，反復法の中の共役残差法 (Conjugate Residual Methods)(2) を採用する．式 (15) の未知ベクトルを $\mathbf{x}$ と簡略化するとき，連立 1 次代数方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ に対する共役残差法のアルゴリズムは，次のようになる．

1. 初期値 $\mathbf{x}_0$ を与える．
2. 初期残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ を計算し，次の量を用意する．

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{r}_0 \ , \ \mathbf{q}_0 = \mathbf{Ag}_0 \tag{16}$$

3. 以下の計算を解が収束するまで反復する．

1) $$\alpha_k = (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{q}_k)/(\mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}_k) \tag{17}$$

2) $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{g}_k \tag{18}$$

3) $$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k \tag{19}$$

4) 収束判定条件 $\parallel \mathbf{r}_{k+1} \parallel / \mathbf{r}_0 < \varepsilon$ を満たした場合は，$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{g}_k$ とし反復計算を終了する．

5) $$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{Ar}_{k+1} \tag{20}$$

6) $$\beta_{ik} = -(\mathbf{s}_{k+1} \cdot \mathbf{q}_i)/(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i) \quad (i = k - m + 1, \cdots, k) \tag{21}$$

7) $$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \sum_{i=k-m+1}^{k} \beta_{ik} \mathbf{g}_i \tag{22}$$

$$8)\quad \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{s}_{k+1} + \sum_{i=k-m+1}^{k} \beta_{ik}\mathbf{q}_i \tag{23}$$

ここで k は反復回数，m は探索方向のベクトルを表す．本研究では $m=1$ とする．

共役残差法の利点は次の二つである．

1. 行列に変形を加えないため丸め誤差は蓄積しない．
2. 式 (16)，(20) のように，行列 $\mathbf{A}$ は必ずベクトルとの積の形で現れる．そこで，要素ごとに $\mathbf{A}$ の要素行列とベクトルの積を計算し，その結果の要素ベクトルを重ね合わせれば，行列 $\mathbf{A}$ そのものをメモリに格納する必要がない．すなわち，省メモリ性に優れる．

5. 計算モデル

5.1 部屋のモデル

Fig. 3 に計算に用いる室内空間の大きさを示す．部屋の寸法は，次項で述べる人体モデルの胴体の直径 (0.3m を想定) を代表長さとして無次元化してある．部屋は 6 畳間程度の広さである．人の初期位置の前方に 392 個の塵埃に見立てた点を配置する．

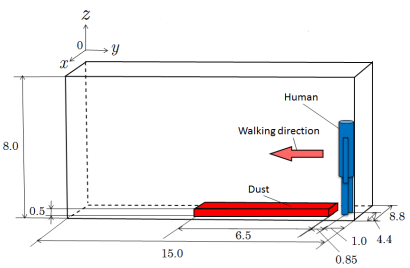
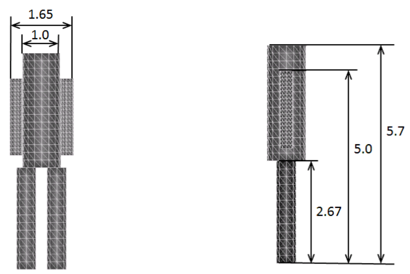


Fig. 3　Dimension of computational model

5.2 人体のモデル

人体のモデルを Fig. 4 に示す．手，足，胴体はそれぞれ円筒形で手，足，胴体の直径はそれぞれ 0.33，0.5，1.0 である．手と足はそれぞれ最大振幅 20°，$-20°$ の振り子運動をさせる．また，人体全体は一定の速さ 1 で Fig. 3 の y 軸負方向に直進する．流れのレイノルズ数を 10^3 とする．これは人の歩行速さが 0.05m/s に相当する．人は，Fig. 3 の位置から歩き始め，直進して，前方の壁の手前で停止する．



(a)Front　　(b)Side

Fig. 4　Human model

5.3 塵埃の取り扱い

室内に存在する塵埃には，様々な種類がある．その種類によって浮遊する範囲や沈降速度が異なる．本研究では塵埃の大きさが 0.3μm 程度の塵埃を対象とする．シミュレーション時間を人が歩行し始めてから 100s 程度とすると，対象とする塵埃の沈降距離は多くとも 6.8μm 程度となる．したがって，本研究では塵埃の運動における重力の影響を無視する．また，静電気や湿度の影響も無視することとする．塵埃は流れに乗って移動するとして，塵埃の位置での速度に時間増分をかけることでその移動量を計算する．

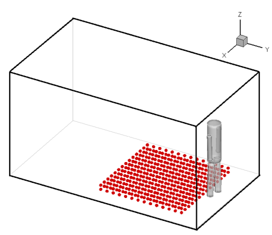
6. 計算結果と比較

6.1 計算結果

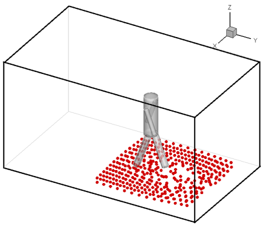
人の歩行によって塵埃が飛散する様子のシミュレーション結果を Fig. 5 に示す．人が手足を動かしながら歩行する間，塵埃は床付近でうごめくだけだが，人が壁の直前で停止すると，壁に沿って上昇気流が発生する．この影響で塵埃が一気に天井へ舞い上がる様子が計算されている．

Fig. 6 は，Fractional-step 法を用いた辻 [(1)] の計算結果と共役残差法を用いた本研究の計算結果を比較したもので，ある瞬間の人の前方の圧力分布を示している．辻 [(1)] の計算結果 (a) では，圧力分布にムラがあり明らかに圧力振動を起こしている．これは，速度と圧力の計算を分離していることによって，非圧縮条件式 (2) の満足度が低いためであると考えられる．一方，本研究の計算結果 (b) では，(a) に見られるようなムラがなく圧力に関して精度の高い計算が行われていることが示されている．これは，ナビエ・ストークス方程式 (1) と非圧縮条件式 (2) を式 (15) のように一つの連立 1 次代数方程式にまとめ，速度と圧力を同時に解いていることによると考えられる．このように速度と圧力を同時に解く方法は，計算精度が高いことは知られていたが，式 (15) に示す大規模な係数行列 $\mathbf{A}$ を扱うために，計算機メモリの制約を受け易いのが難点であった．本研究によって，共役残差法を用いることによりメモリの制約を受けることなく速度と圧力を同時に解く計算が可能となった．

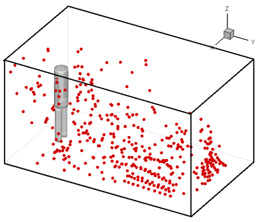
なお，Fig. 6(a) の計算に要するメモリ使用量が 382MB であるのに対して，Fig. 6(b) の計算に要するメモリ容量は 95MB であった．



(a)$t=0$

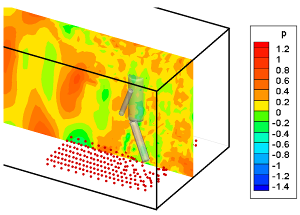


(b)$t = 5$

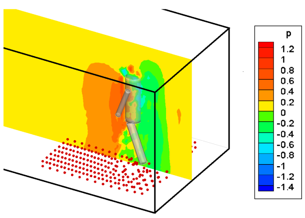


(c)$t = 100$

Fig. 5　Computational results of the scatter of dust



(a)Predecessor’s method



(b)CR method

Fig. 6　Comparison of pressure distribution

6.2 計算領域の拡張

Fractional-step 法による計算では困難であった，拡張した計算領域でのシミュレーションを行う．Fig. 7 に示すように，Fig. 3 の計算領域を y 軸方向 (人の歩行の向き) に 2 倍に広げる．このモデルによって，壁による上昇気流の影響を排除して，人の歩行，手足の動きのみによる塵埃の飛散の様子を調べる．計算領域の大きさ以外の計算条件は 6.1 項と同じである．

Fig. 8 に塵埃の飛散のシミュレーション結果を示す．上昇気流が発生しないため天井へ舞い上がる塵埃は少ないが，代わりに人の歩行が作り出す流れに乗って，人の前方へ飛んでいく塵埃が多いことがわかる．

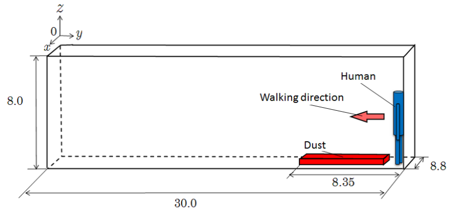
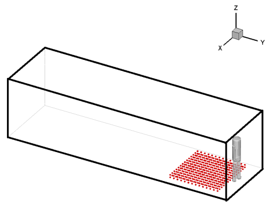
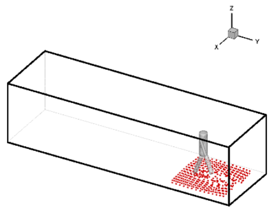


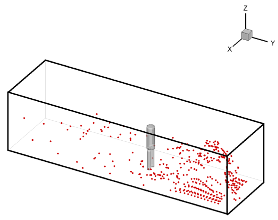
Fig. 7　Computational model of a long room



(a)$t = 0$



(b)$t = 5$



(c)$t = 100$

Fig. 8　Computational results of the scatter of dust in a long room

7. おわりに

本研究では，共役残差法を用いた室内の流れ計算の解析を行った．共役残差法を用いることで圧力の振動を抑制し，精度の高い計算結果を得ることができた．また，メモリ使用量が辻 [1] に比べ，約 1/4 程度に抑えることができた．拡張した計算領域の計算結果から 6 畳間程度の計算領域では壁に沿う上昇気流の影響を強く受けることが確認できた．本研究によって，より実環境に近づけた計算領域での数値解析を行えることが期待できる．

参考文献

(1) 辻紀子，室内空間における人の移動による塵埃の飛散に関する 3 次元数値シミュレーション，修士論文，中央大学，東京 (2010)
(2) 小国力 編著，行列計算ソフトウェア，丸善株式会社，1991