到達時間の差を利用した新しいバリアオプションの開発

藤田研究室
14N7100016I　山内健太

1　研究目的

危険資産の時刻 t における株価の価格を S_tとするとき、収益率$\frac{dS_t}{S_t}$は次のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

これをブラックショールズモデルと呼ぶ。μ は資産の平均成長率 (確定的な収益) を意味し、ドリフトと呼ぶ。また dW_t はブラウン運動の増分であり、σ はその確定的な変動の激しさを表し、ボラティリティと呼ばれる。一般に安定した会社の株価はドリフトは低いがボラティリティも小さいため暴落などのリスクが小さく、一方ベンチャー企業の株価はドリフトが高いがボラティリティも大きいため、リスクが大きい。このように、ブラックショールズモデルでは様々な危険資産をドリフトとボラティリティという 2 つのパラメータによって特徴づけている。

また、金融工学のバリアオプションにおいて、従来のバリアオプションは「株価が満期以前にある値（バリア）に到達すればオプション契約発生、もしくはオプション契約消滅」という付帯条件付きのオプションのことを指し、この付帯条件がつく分オプション料が安くなるというメリットがあるのが特徴であった。オプション契約が発生したときのペイオフの値が満期時の株価にのみ依存し、バリアに早く到達しても満期直前に到達してもペイオフの額が変わらないことに注目し、本研究では新たにボーナス項と呼ばれるバリア到達時間の値によって値の変化する項を導入してベンチャー企業のようなリスクの大きい株に対するスムーズヘッジングを期待する新たなバリアオプションを開発し、プライシング、評価を行うことを目的とする。なお、シミュレーションにあたっては R を用いた。

2　解析手法

2.1　株価の仮定

モンテカルロ・シミュレーションを用いてデリバティブのプライシングを行うにあたって、本研究では株価は以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

この微分方程式は伊藤の公式を用いて以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
dlog|S_t| &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}dS_t dS_t \\
&= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2S_t^2} \\
&\quad (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\
&= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\
log|S_t| &= log|S_0| + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \\
S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}
\end{aligned}$$

以下株価はこの S_t に従ってシミュレーションを行うものとする。

2.2　プライシング原理

ある確率変数 Y の期待値 $E[Y]$ を考えるとき、$Y_j(j = 0, 1, 2, \cdots)$ が独立に Y と同じ分布に従う場合、大数の法則より、

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} E[Y]$$

が成り立つ。また、デリバティブの価格は原資産 S、ペイオフの関数を f とすると、

$$e^{-rT}E^Q[f(S_T)]$$

で与えられるので、確率変数列 $S_T^i(i = 1, 2, \cdots)$ を生成して、

$$E^Q[f(S_T)] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(S_T^i)$$

としてデリバティブ価格を計算する。株価は 2.1 節で与えられているのでデリバティブ価格は

$$e^{-rT}E[f(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}N(0,1)})]$$

で求めることができる。

3 ボーナス項を用いた新しいバリアオプションの提案

新しいオプションを提案する前に既存のバリアオプションについて確認をしておく。1. 研究目的でも書いたように、バリアオプションとは「株価が満期以前にある値 (バリア)A に到達すればオプション契約発生、もしくはオプション契約消滅」という付帯条件付きのオプションのことであり、これを式で表すと以下のようになる。

$$1_{\{\tau<T\}} f(S_T)$$

ここで、

$$\tau = \inf\{t | S_t = A\}, 1_c(\omega) = \begin{cases} 1 \ (\omega \in C) \\ 0 \ (\omega \notin C) \end{cases}$$

である。この式はノックインオプションを表し、指示関数の条件を$\tau < T$ から$\tau > T$ に変えるとノックアウトオプションになる。本研究ではその中でも特にノックインオプションに注目してこれを拡張していく。上の式で $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$ にするとノックインコールオプションになり、満期までの経路のうちで 1 度でもバリア価格にタッチすることによりオプションが発生するが、発生するペイオフは$\max(S_T - K, 0)$ の項により決定され、満期までのどのタイミングでバリアに到達したかはペイオフ額に考慮されてはいない。そこで、新しいオプションの提案として以下のようなペイオフを持つ新たなノックインオプションを提案し、これをボーナスバリアオプションと名付けることにする。

$$1_{\{\tau<T\}}(1 + e^{-\alpha\tau}) f(S_T)$$

上の式のうち、$e^{-\alpha\tau} f(S_T)$ の項をボーナス項と呼び、この項の導入によりバリア到達時間をペイオフ額に反映させることにする。$\alpha \to \infty$ でボーナス項が 0 になるので通常のバリアオプションに近づき、$\tau \to 0$(つまりデリバティブを買った瞬間にバリア到達) で 2 倍のペイオフを持つバリアオプションに近づくことがわかる。なお、このオプションに類似するオプションとしては参考文献 [1] の 5.3 節にRemaining Caution Time Discounted Option（以下に式を示す）が存在しボーナスバリアオプション考案の参考にした。

$$e^{-\lambda(T-\tau_A)} f(S_T)$$

4 解析と結果

モンテカルロ・シミュレーションを行うにあたって、まずは代表的なデリバティブであるコールオプションに関してのシミュレーションを行い、次にバリアを付けたノックインバリアコールオプションのシミュレーション、そして最後にボーナスバリアオプションというように少しずつオプションを複雑化して価格の変化等を探ってみることにする。なお、シミュレーションにあたっては各パラメータは以下の表 1 のように定めた。S は初期株価、K は行使価格、rは予定利率、σはボラティリティ、T は満期を示す。

表 1: 各パラメータ

S	K	r	σ	T
100	100	0.01	0.2	1

4.1 コールオプション

コールオプションの発生確率及び、オプション価格について行使価格 K の値を変化させて、価格およびオプション発生確率がどのように変化したかを表したものを図 1、図 2 に示す。

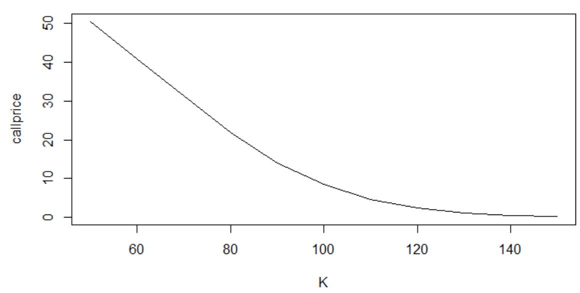

図 1: 行使価格 K を変化させたときのオプション価格の変化

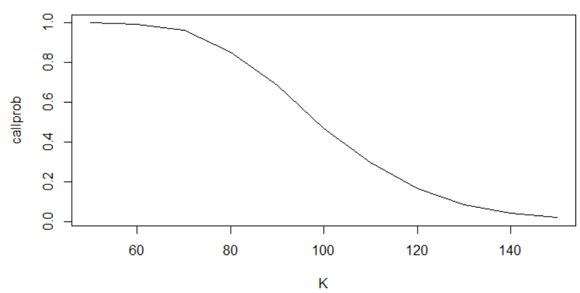

図 2: 行使価格 K を変化させたときのオプション契約発生率の変化

図 1、図 2 からわかるように、行使価格が 100 のときに価格が約 8.6、発生確率が約 0.5 であり、この行使価格を境にして行使価格が上がれば発生確率が小さくなり、オプション価格が小さくなって、行使価格が下がれば発生確率が大きくなり、オプション価格が大きくなる。ここから、オプションの契約発生条件の厳しい条件ほどオプション価格が低くなることがわかるので、次のコールオプションにバリアを付けるだけで価格が下がることが予想できる。

4.2 バリア価格の変化に対するバリア到達確率の変化

コールオプションにバリアを張って価格の変化を見る前に、バリア価格をどの位置に設定するかによってコールオプション発生確率がどのように変化するのかを $K = 100$ に固定してシミュレーションを行う。その結果を以下の図 3、図 4 に示す。

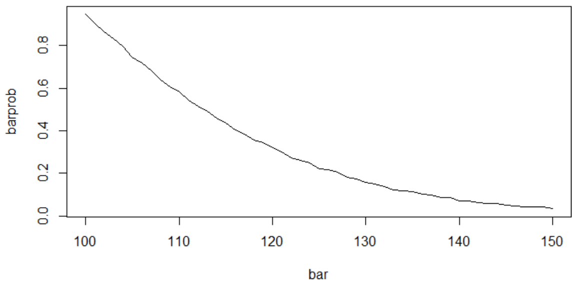

図 3: バリア価格を変化させたときの到達確率の変化

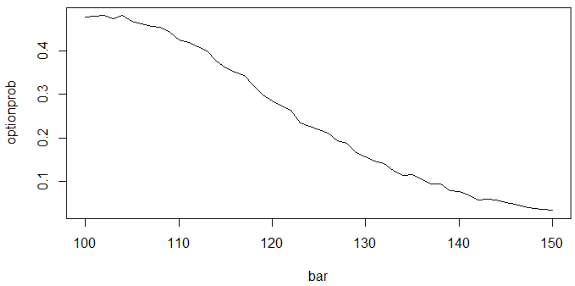

図 4: バリア価格を変化させたときのコールオプション発生確率の変化

これらより、バリア価格が 100 のときはほとんどがバリア到達をするが、コールオプションの条件である満期時の株価が 100 以上というものを満たすもののみがオプション契約を発生させるので、バリア到達確率とオプション発生確率が $\frac{1}{2}$ の関係になっているが、バリア価格が 100 より大きいときはバリア条件を達成するとそのまま 100 以上を保ったまま満期をむかえることが多いため段々とバリア到達確率とオプション発生確率の差が縮まっていくことが読み取れる。

4.3 ノックインバリアコールオプション

3.1 節で扱ったコールオプションにノックインバリアを作って価格および発生確率をシミュレーションを行う。バリア価格を 120 としてシミュレーションを行った結果を図 5 に示す。

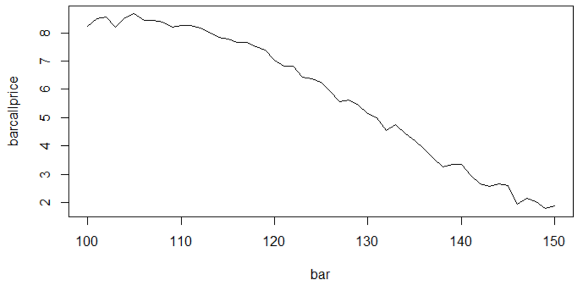

図 5: バリア価格を変化させたときのオプション価格の変化

図 5 から気づくが、3.2 節で扱った図 4 とかなり酷似しているが、このことからバリアオプション価格はバリア条件とコールオプション条件の両方を同時に満たす確率の変化によってオプション価格が決まっていていることがわかる。

4.4 ボーナスバリアオプション

2.3 節で提案した新しいボーナスバリアオプションのシミュレーションを行った結果を以下の図 6 に示す。

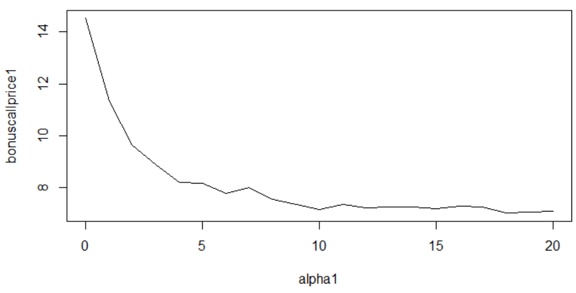

図 6: α を変化させたときのオプション価格の変化

図 6 からわかるように、α が 0 のときにオプション価格が約 14、そして α の増加とともにオプション価格は減少していき、α が 5 を超えたあたりからオプション価格は 7 付近で収束することがわかる。α が 5 以上ではボーナス項を加味しないときのノックインコールオプションと価格がほとんど変わらないので、実際の金融商品として提案する際には α は 0 から 5 あたりで顧客のニーズなどに応じて変化させていくことが望ましいと考えられる。

5　考察と今後の課題

本論文では既存のノックインオプションに注目し、株価が満期までにバリアに到達する時間が早くても遅くてもペイオフ額が同じであるという点を、ボーナス項の導入によってバリア到達時間をペイオフ額に反映させることができないかという発想で開発したオプションである。通常のノックインバリアオプションと比較してボーナス項 $e^{-\alpha\tau}f(x)$ が加わっている分、バリア到達しただけで通常のノックインバリアオプションよりも多くのペイオフが貰えるという特徴がある。オプション価格とペイオフ額の期待値は常に等しい関係にあるので顧客のニーズに合わせて α を決定して販売することでより柔軟なバリアオプションになることが期待される。

価格のシミュレーションに関しては本論文ではモンテカルロシミュレーションを用いたが、モンテカルロシミュレーションの欠点としてシミュレーションの精度を求めると試行回数が大変多くなってしまう点が挙げられる。一般に、試行回数を n 回とすると期待誤差は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の割合で減少するので、精度を 1 桁上げるには 100 倍の試行回数が必要になる。しかし、実際のシミュレーションで数万回の試行を常時行うことが困難であるため、負の相関法や制御変量法などのシミュレーションにおける分散減少法をプログラムに組み込むことによってより高精度なシミュレーションが行えたのではないかと考えられ、この点を今後の課題とする。

また、既存の多くのオプションにブラックショールズ式を用いた解析解が与えられているが本論文では数値解析しかできなかったため、自分で開発したオプションにも解析解を与えたい、ということも今後の課題として挙げられる。

参考文献

[1] 藤田岳彦 (2002), ファイナンスの確率解析入門, 講談社サイエンティフィク

[2] 藤田岳彦（2010), 弱点克服　大学生の確率・統計, 東京図書

[3] 藤田岳彦 (2007), モデリング問題集, 日本アクチュアリー会

[4] S.E. シュリーヴ著, 長山いづみ訳 (2012), ファイナンスのための確率解析 II(連続時間モデル), シュプリンガージャパン

[5] Martin Baxter,Andrew Rennie 著, 藤田岳彦, 塩谷匡介, 高岡浩一郎訳 (2001), デリバティブ価格理論入門-金融工学への確率解析, シグマベイスキャピタル

[6] 湯前祥二, 鈴木輝好 (2000), モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店

[7] 大崎秀一・吉川大介 (2013), ファイナンスのための R プログラミング-証券投資理論の実践に向けて-, 共立出版

[8] 石田基広 (2012), R で学ぶデータ・プログラミング入門, 共立出版