

PDS-FEM を用いた自由表面流れにおける流体 構造連成解析手法の構築

Development of fluid-structure interaction method for free surface flow using PDS-FEM

14N3100007J 太田 真貴子

Makiko OTA

keyword : Finite element method, VOF method, LES, FSI method, Navier – Stokes equation

1. はじめに

沿岸地域では、津波による構造物の損傷による被害が発生しており、津波が構造物に及ぼす挙動を正確に把握することは防災・減災の観点から重要である。そして、津波が構造物に及ぼす現象は複雑であり大容量のデータが必要であるため、コンピュータ性能の飛躍的な向上から、評価手法として数値シミュレーションは有効であるといえる。その数値解析手法として、流れ場における支配方程式には 3 次元 Navier-Stokes 方程式を用い、離散化手法として任意形状への適合性に優れる有限要素法を導入することは有効である。また、構造物の損傷を考慮するために、動的破壊進展を表現できる PDS-FEM¹⁾ に基づく構造解析は有効である。また、津波は乱流現象であり、DNS(Direct Numerical Simulation) と比べて計算負荷を低減できる、Sub Grid Scale(SGS) の渦の作用を乱流モデルにより近似する Smagorinsky モデル²⁾ に基づく LES (Large Eddy Simulation) を導入することは有効な手段であるといえる。

そこで、本研究では構造物の損傷解析が可能な自由表面流れにおける流体 構造連成解析手法の構築を行う。数値解析例として、角柱構造物を有する 3 次元ダムブレイク問題を取り上げ、LES に基づく自由表面流れ解析手法の有効性の検証を行った。また、流体 構造連成解析の例題として、構造物を有する 3 次元静水問題を取り上げる。

2. 流体に関する数値解析手法

本手法は、密度・粘性係数の計算と流速・圧力の計算、自由表面位置の計算、流体力の計算で構成される。

(1) 密度・粘性係数の計算

自由表面を表現する手法として、界面追跡法と比べてメッシュの歪みが生じず計算が破綻しにくい界面捕捉法の一つである VOF 法³⁾ を用いる。VOF 法は自由表面位置を VOF 関数 ϕ により表現する手法であり、気体で 0.0、液体で 1.0、自由表面上で 0.5 の値をとる。気体、液体の密度 ρ と粘性係数 μ は以下の式で表される。

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi) \quad (1)$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \quad (2)$$

ここで、 $\rho_l, \rho_g, \mu_l, \mu_g$ はそれぞれ液体の密度、気体の密度、液体の粘性係数、気体の粘性係数である。

(2) 流速・圧力の計算

非圧縮性粘性流体の支配方程式は、LES に基づく Navier-Stokes 方程式 (3) と連続式 (4) で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i \right) + \rho \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

ここで、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域、 $\bar{u}_i, \bar{p}, f_i, \rho, \mu$ はそれぞれ流速、圧力、物体力、密度、粘性係数である。 τ_{ij} は SGS 応力であり、SGS の乱れによる Grid Scale (GS) の流れ場への影響は、 τ_{ij} を通じて GS の運動方程式に組み込まれる。SGS 応力は、Smagorinsky モデルを用いて以下のようにモデル化される。

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j = -2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} \quad (5)$$

$$\nu_{SGS} = (C_S \Delta f)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (6)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

ここで、 $\nu_{SGS}, \bar{S}_{ij}, C_S$ はそれぞれ SGS 渦動粘性係数、ひずみ速度テンソルの GS 成分、Smagorinsky 定数である。 Δ はフィルター幅であり、要素体積の 3 乗根とする。 f は van Driest の減衰関数であり、速度勾配が大きい壁面近傍における値の過剰評価を防ぐために、フィルター幅に乗じて補正を行う。

Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件は、それぞれ式 (8), (9) のように示す。

$$\bar{u}_i = g_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (8)$$

$$\left(-\bar{p} \delta_{ij} + 2(\mu + \rho \nu_{SGS}) \bar{S}_{ij} \right) n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (9)$$

Γ_g, Γ_h はそれぞれ Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件が与えられる境界を表し、 g_i, h_i は境界上での流速とトラクションを表す。 δ_{ij}, n_j はそれぞれ Kronecker のデルタ、外向き単位法線ベクトルを表す。

支配方程式 (3), (4) に対し、空間方向の離散化には SUPG/PSPG 法⁴⁾ に基づく安定化有限要素法を適用し、時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用する。移流速度は、2 次精度 Adams-Bashforth 法により陽的に近似する。連立一次方程式の解法として、Element-by-Element 処理に基づく GPBi-CG 法を用いる。

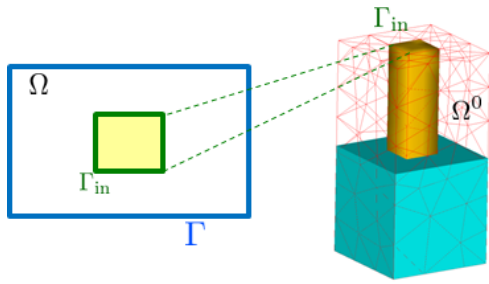


図-1 解析領域と構造物周りのメッシュ拡大図

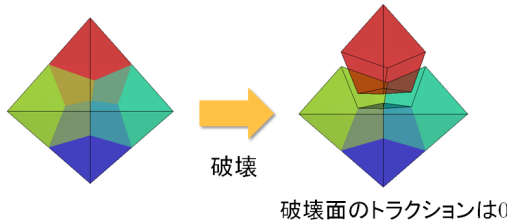


図-2 Delaunay 四面体を構成する Voronoi ブロック

(3) 自由表面位置の計算

VOF 関数は、移流方程式 (10) により支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

ここで、流速 \bar{u}_i は Navier-Stokes 方程式 (3) と連続式 (4) から計算した値を用いる。支配方程式 (10) に対し、空間方向の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し、時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用する。連立一次方程式の解法として、Element-by-Element 処理に基づく GPBi-CG 法を用いる。

また、拡散の効果から界面の鋭敏化が保たれない場合があるため、VOF 関数の値を補正する界面鋭敏化/体積保存手法⁵⁾を導入する。

(4) 流体力の計算

支配方程式 (3), (4) に対し、重み付き残差法を適用し、圧力項と粘性項に対して部分積分を施すことにより、以下の弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^0} w_i^h \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i^h}{\partial t} + \bar{u}_j^h \frac{\partial \bar{u}_i^h}{\partial x_j} - f_i \right) d\Omega - \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_i} \bar{p}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega^0} q^h \frac{\partial \bar{u}_i^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} 2(\mu + \rho \nu_{SGS}) \bar{S}_{ij} \\ & = \int_{\Gamma_{in}} w_i^h \left(-\bar{p} \delta_{ij} + 2(\mu + \rho \nu_{SGS}) \bar{S}_{ij} \right) n_j d\Gamma \quad (11) \end{aligned}$$

ここで、 Ω^0 と Γ_{in} は、図 1 に示すように、構造物周りの領域と境界を表す。 Γ_{in} 上の重み係数をゼロとしない場合を考えると、右辺の積分項そのものが構造物に働く流体力となる。計算された流速と圧力を、式 (11) に代入することにより、構造物に働く流体力が求められる。

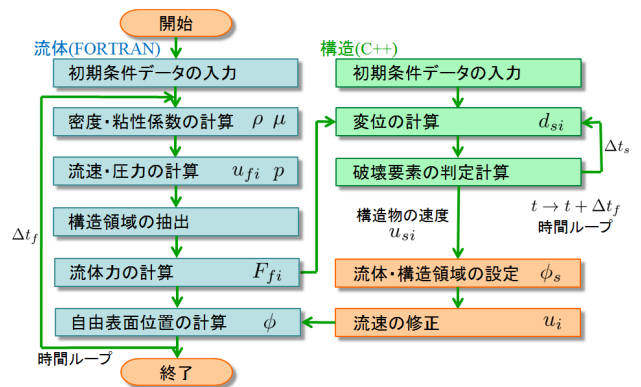
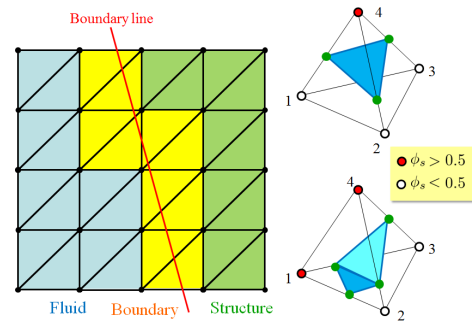


図-3 流体 構造連成解析におけるフローチャート



(a) 全体領域分割図 (b) 四面体要素の境界要素図

図-4 流体領域と構造領域の分割

3. 構造に関する数値解析手法

破壊とそれに伴う変位の不連続性を表現するために、固体連続体に対する粒子的描像を与える粒子離散化手法である PDS (Particle Discretization Scheme) を適用する。線形弾性体の脆性破壊を解析対象とし、均質な線形弾性体の微小変形を考えると、支配方程式は、つり合い式 (12), 材料構成則 (13), 変位 ひずみ関係式 (14) である。

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (14)$$

ここで、 σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , C_{ijkl} , b_i はそれぞれ応力、ひずみ、変位、弾性係数、体積力である。

PDS によって離散化された変位場は、互いに重なり合わず、Delaunay 四面体内で不連続となる変位場である。動的問題に拡張するために PDS-FEM のハミルトン形式による定式化を行い、運動の時間発展を精度よく積分するためにシンプレクティック数値積分法を用いる。破壊進展は、図 2 に示すように、隣接する Voronoi ブロック間の相互作用が失われることにより表現される。

4. 流体 構造連成解析手法

流体 構造連成解析フローチャートを図 3 に示す。

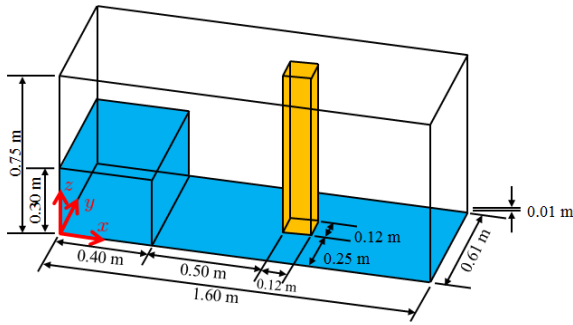


図-5 構造物を有する3次元ダムブレイク問題

(1) 構造領域の抽出

本手法は、流体領域と構造領域を識別関数 ϕ_s を用いて分割し、流体解析で求めた流体力を用いて構造解析を行う手法である。 ϕ_s は、構造領域で1、流体領域で0の値をとる。図4に、流体領域と構造領域の分割を示す。構造領域は、四面体要素の1つ以上の節点において0.5以上の値であり平面が作成できる領域とする。構造解析で用いる流体力において、流体解析と構造解析で用いる微小時間増分量は異なるため、時間に関する流体力の線形補間を行う。

(2) 流体・構造領域の設定

識別関数 ϕ_s は、流体解析における自由表面位置の計算と同様に、移流方程式(15)により支配される。

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + u_{si} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

ここで、 u_{si} は構造物の速度である。流れ場の計算で用いる密度 ρ と粘性係数 μ は以下のように決定できる。

$$\rho = \rho_s \phi_s + \rho_f (1 - \phi_s) \quad (16)$$

$$\mu = \mu_s \phi_s + \mu_f (1 - \phi_s) \quad (17)$$

ここで、 ρ_s 、 μ_s 、 ρ_f 、 μ_f はそれぞれ構造領域の密度と粘性係数、流体領域の密度と粘性係数である。

構造物の移動を流体に反映させるために、式(18)を用いて流体解析の流速 u_i の修正を行う。

$$u_i = u_{si} \phi_s + u_{fi} (1 - \phi_s) \quad (18)$$

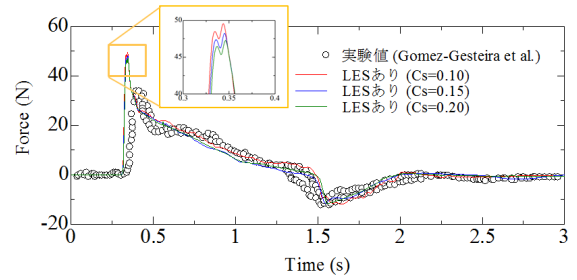
5. 数値解析例

(1) 角柱構造物を有する3次元ダムブレイク問題

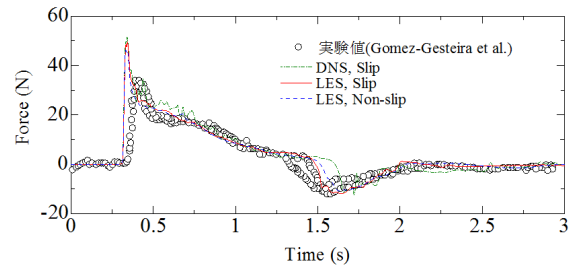
数値解析例として、図5に示す角柱構造物を有する3次元ダムブレイク問題を取り上げ、構造物に作用する流体力を計算し、実験値⁶⁾との比較を行う。

a) 解析条件

解析メッシュは、最小メッシュ幅 1.27×10^{-3} m である節点数 1,224,746、要素数 7,029,070 の四面体メッシュを用いる。境界条件として、壁面と構造物周りにSlip条件またはNon-slip条件を与える。微小時間増分量は、0.001 s とする。Smagorinsky定数は、0.10、



(a) Smagorinsky 定数の違い (Slip 境界条件)



(b) LES の有無と壁面における境界条件の違い

図-6 構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴

0.15、0.20 の3ケースとする。液体、気体の密度はそれぞれ 1000 kg/m^3 、 1.0 kg/m^3 、粘性係数は $1.00 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、 $1.00 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ とする。

b) 解析結果

図6に、構造物に働く x 方向の流体力の時刻歴を示す。図6(a)に、Smagorinsky定数の違いによる流体力の計算値の比較を示す。境界条件として、Slip条件を与える。Smagorinsky定数の違いにより、流体力の計算値に大きな差異はみられないが、Smagorinsky定数が大きいほど、LESによる粘性の効果から、遅れが生じ流体力の大きさは小さくなった。

図6(b)に、LESの有無と壁面と構造物周りの境界条件の違いによる流体力の計算値の比較を示す。LESを導入した計算値は、LESを導入しない計算値と比較して、実験値に近い値が得られ振動が小さくなる結果が得られた。境界条件の違いによる比較において、LESを導入しSmagorinsky定数の値を0.10とする結果を示す。各計算値において、流体力が最大値である時刻は差異が見られないが、時間の経過により、Non-slip条件の流体力の時刻歴は、Slip条件より遅れる結果が得られた。

図7に、流体力が最大である $t = 0.34$ sにおける自由表面形状と圧力分布の計算結果を示す。境界条件として、Slip条件を与える。LESの導入により、水面の振動が小さくなる結果が得られた。また、Smagorinsky定数の値が大きいほど、界面の振動が小さくなった。

図8に、境界条件の違いによる $t = 0.40$ sにおける自由表面形状と圧力分布の計算結果の比較を示す。LESを導入し、Smagorinsky定数の値を0.10とする。

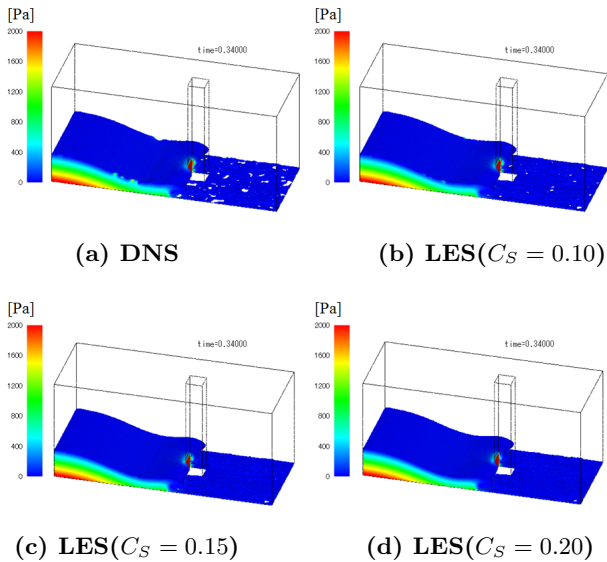


図-7 $t = 0.34$ sにおける自由表面形状と圧力分布 (Slip 境界条件)

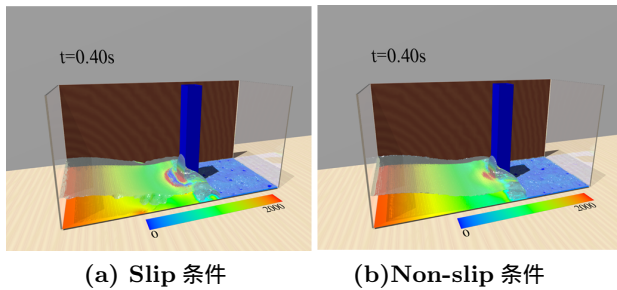


図-8 $t = 0.40$ sにおける自由表面形状と圧力分布 (LES, $C_S = 0.10$)

Non-slip 条件の計算結果は, Slip 条件の計算結果と比べて, 水面の振動が小さくなる結果が得られた.

(2) 構造物を有する 3 次元静水問題

数値解析例として, 図 9 に示すような構造物を有する 3 次元静水問題を取り上げ, 流体力を外力とした PDS-FEM に基づく構造解析を行う. なお, 本解析では流体領域から構造領域の一方向への作用とする.

a) 解析条件

流体領域において, 解析メッシュは領域を $100 \times 20 \times 100$ 分割した四面体メッシュを用いる. 微小時間増分量は, 1.0×10^{-3} s, 境界条件は壁面に Slip 条件を与える.

構造領域において, 解析メッシュは領域を $2 \times 20 \times 100$ 分割した四面体メッシュを用いる. 微小時間増分量は, 1.0×10^{-7} s, ヤング率, ポアソン比, 破断応力はそれぞれ 4.65 GPa, 0.345, 43.3 MPa とする.

b) 解析結果

図 10 に, 構造解析において破壊が生じた弾性壁の破壊要素と相当応力の分布と流体解析における水面形と圧力分布の計算結果を示す. 弾性壁の下部から破壊要素が発生し, 流体力を用いた構造解析が可能となった. 今後は流体領域と構造領域の連成解析を行う予定である.

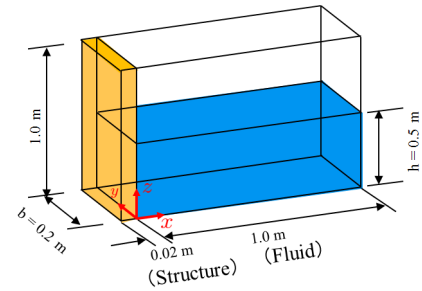


図-9 弾性壁を有する 3 次元静水問題

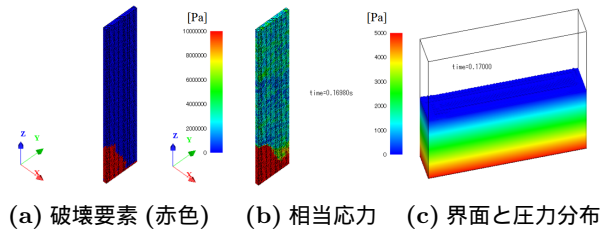


図-10 構造物の破壊進展解析の計算結果

6. おわりに

本研究では, 自由表面流れにおける流体力を正確に評価するために LES を導入し, 流体 構造連成解析手法の構築を行った結果, 以下の結論を得た.

- 角柱構造物を有する 3 次元ダムブレイク問題において, LES を導入した計算結果は実験値に近い結果が得られ, LES を用いた自由表面流れ解析手法の有効性が確認された.
- 構造物を有する 3 次元静水問題において, 流体力を外力とした動的破壊解析が可能となった.

今後の課題として, 流体 構造連成解析の定量的な評価を行うとともに, 大規模問題への適用が挙げられる.

参考文献

- 1) 小國健二, 堀宗朗, 坂口秀: 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集, 766, pp.203-217, 2004.
- 2) Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, 91, 3, pp.99-164, 1963.
- 3) Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, 39, pp.201-225, 1981.
- 4) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1992.
- 5) Aliabadi, S. and Tezduyar, T.E.: Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interface, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, 3-4, pp.243-261, 2000.
- 6) Gomez-Gesteira, M. and Dalrymple, R.A.: Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130, pp.63-69, 2004.