

エクマン境界層理論を用いた蛇行河道内の流れの3次元解析 Three-Dimensional Analysis On The Flow In Meandering Channels By Using Ekman Boundary Layer Theory

14N3100048E 刘 立歆
Lixin LIU

Key Words : Meandering Channels, Ekman Boundary, Sine Generated Curve, Perturbation Theory

1. はじめに

河川蛇行という問題について、1926年、アインシュタイン¹⁾はお茶の葉が中心に集まる問題を「お茶の葉のパラドックス: Tea Leaf Paradox」と呼んだ。なぜパラドックスかというと、お茶の葉は中心に集まるのではなく、周に吹き飛ばされると思える。アインシュタインはティーカップ問題と河川がなぜ蛇行するかという問題が関係することを明らかにした。彼の理論により、蛇行している河川に螺旋流があることが分かった。螺旋流の影響で、河川が蛇行しているが、水の慣性のため、最大曲率に到着すると、相対関係は反転し、この現象を繰り返すことが蛇行の成因であると考えた。藤芳の研究²⁾はティーカップ問題と同じように、流路断面に二つの螺旋流がある、二つの螺旋流の強うさの大小関係の相対的变化によって蛇行が起きると考えた。彼は蛇行長と流水の断面積との関係を研究した。1905年、V.W.Ekmanによって、コリオリ力と渦粘性がつりあう流体に見られる境界層がエクマン境界層と呼ばれる。回転流体における、回転流体の上下面にエクマン境界層があることが分かった。河川が蛇行しているとき、座標系を変化している、その変化により、遠心力と向心力とコリオリ力と摩擦力などが釣り合っている。回転流について、簡単に考えると、断面から非粘性域とエクマン境界層二つ境界になる。エクマン境界層内の流体は、底面からの摩擦のために回転速度が内部の非粘性域により遅くなる、一次流が回転軸回りに回転しながら、二次流が中心に近づいている、摩擦力がだんだん大きくなって、内部非粘性域に向かって行く。この現象と河川の螺旋流が同じであることがみられる、河道内に粘性域もあるため、蛇行している河川の底面にエクマン境界層もあると思う。本研究は、河川の底面にエクマン境界層があると考え、非粘性域とエクマン境界層を分けて、エクマン境界層の厚さに着目して、蛇行河道内の流れについて、三次元解析を行う。

2. エクマン境界層の解析

(1) エクマン境界層の一般解

図-1のように、二次元回転平面流体において、圧力傾度力、コリオリ力、渦度粘性が釣り合っている状況を考える。摩擦力を無視する場合、基礎方程式の連続方程式及び運動方程式が以下ようになる。式(1)、(2)は運動方程式である、式(3)は連続式である。

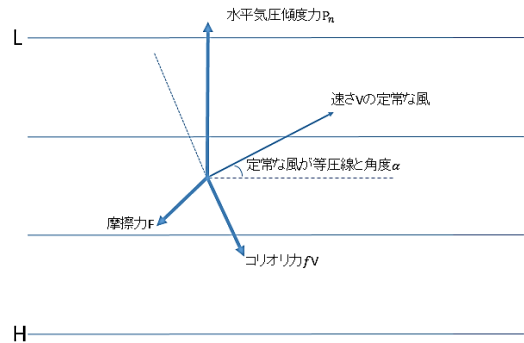


図-1 北半球のある地点の水平気圧傾度力(高圧から低圧に指し)、コリオリ力、摩擦力の三者の釣り合い

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

u, v, w は x, y, z 方向のそれぞれの速度、 t は運動時間、 ρ は密度、 f はコリオリのパラメーター(一定)、 P は圧力である。

簡単するために、運動が定常であるから、時間に対する微分項が0になる。非線形項はコリオリ力に比べて無視できる。平均流鉛直構造は乱流フラックスに依存すると考える。 K は z 方向の渦粘性係数、 z によらず一定。運動方程式が以下ようになる。

$$-f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$-f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (5)$$

摩擦力の影響がないとすれば x, y 方向の地衡風 u_g, v_g が成り立っている、運動方向は等圧線と平行とすれば、

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0 \quad (6)$$

$$K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0 \quad (7)$$

と書き直せる。

次に、境界条件に対して、地表面から十分になれた上空では、風速が地衡風になるわけである、近地面では、接地境界層の分布と結びつけるので、地表面では速度が0である

と考えれば.

$$z \rightarrow \infty : u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g \quad (8)$$

$$z \rightarrow 0 : u \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \quad (9)$$

解は以下ようになる.

$$u = u_g \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right] \quad (14)$$

$$v = u_g \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right) \quad (15)$$

(2) 回転流底面のエクマン境界層の解析

回転流底面によって粘性境界層が形成される, 解き方は上述したエクマン境界層の一般解と同じである. ただし, v_g を考慮して, 境界条件が次のように異なる.

$$z \rightarrow \infty : u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g \quad (16)$$

$$z \rightarrow -1 : u \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \quad (17)$$

この境界条件を使うと, 解は以下ようになる.

$$u = u_g \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right] \quad (18)$$

$$-v_g \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right)$$

$$v = v_g \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right] \quad (19)$$

$$+u_g \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right)$$

$(u_g, v_g) = (1.0, 1.0) \text{ cm/sec}$, $f = 10^{-4} / \text{sec}$ と仮定した場合, 流速 u, v と螺旋流の高さとの関係を解析してみよう.

解析結果から見ると, 二つ方向の速度と地衡流の比率がほぼ同じ高さで1になる. そして, 解析で求めた流速分布が粘性底層の流速分布則にあっている. y 方向の速度 v の変動が大きいである. これは螺旋流の構造における, 二次流が中心に近づいている原因を説明できるだろう.

3. 河川蛇行の流れに関する仮定

河道中心線の平面形状は Langbein and Leopold によれば自然蛇行の場合, いわゆる Sine Generated Curve に従うとされている. これは図-3 の偏角 θ が河道距離 \tilde{x}^1 に対して正弦変化しているという曲線である. 方程式が

$$\theta = \theta_0 \sin(2\pi \tilde{x}^1 / L) \quad (20)$$

と表されている.

θ_0 は平均流下方向の直線となす最大偏角, 流路中心軸と谷線との交点から流れ方向に流路中心線に沿って測った距離を \tilde{x}^1 , 流路中心線の直角方向軸を \tilde{x}^2 , 河床に垂直に \tilde{x}^3 と定義する. 座標系の平面 $\tilde{x}^1 \tilde{x}^2$ に接する面と水平面からの勾配を α とする. L は中心軸に沿う蛇行長である.

さらに蛇行水路の流れを解析するに当たって, 次のように仮定する.

1) 水深は水路幅に比較して十分小さい. また蛇行水路の曲率半径は水路幅に比べて十分大きい. したがって側壁に

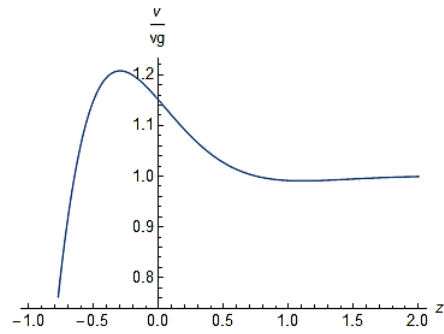


図-2 流速 v と螺旋流の高さとの関係

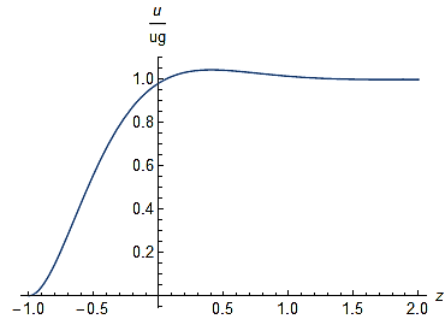


図-3 流速 u と螺旋流の高さとの関係

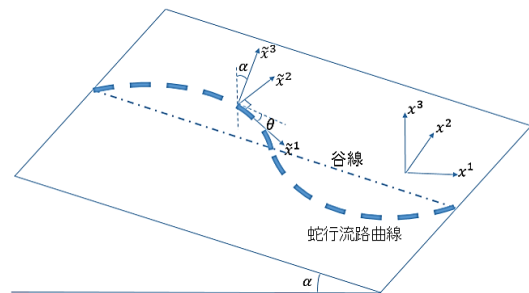
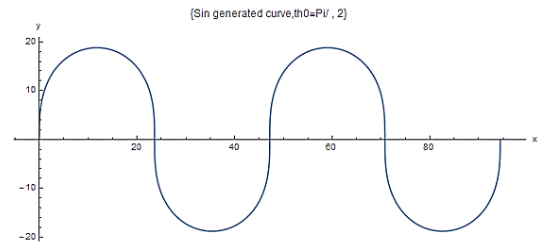
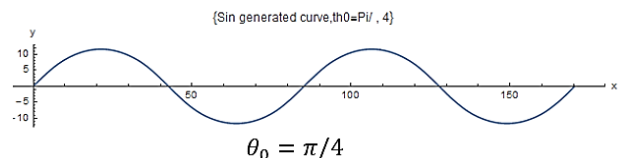


図-4 座標の定義



$$\theta_0 = \pi/2$$

図-5 最大偏角の変化による, 河道中心線の平面形



$$\theta_0 = \pi/4$$

図-6 最大偏角の変化による, 河道中心線の平面形

よる摩擦力の影響を無視できて, 流体に働く摩擦力は河床によって規定されるものとする.

- 2) 水路床の勾配は平均流の下方向に対して一定であるとする.
- 3) 水路幅も流下方向へ一定であるとする.

蛇行長は 100m を仮定して、最大偏角の変化による、 $\theta = \theta_0 \sin(2\pi \tilde{x}^1/L)$ で表される曲線が以下のようになる

4 基礎方程式

(1) 座標変化による、無次元化基礎方程式の変換

水理量の無次元表示としては次のようになる。

$$\begin{aligned} u &= u_s/V, v = u_n/V, w = u_z/V, p = P_a/\rho g H_0, \\ h &= h_a/H_0, s = \tilde{x}^1/R_0, n = \tilde{x}^2/(B_0/2), z = \tilde{x}^3/H_0, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_{zz}/(VH_0^2/R_0), \varepsilon = (B_0/2)/R_0, \lambda = H_0/(B_0/2), \\ k &= \frac{2\pi R_0}{L} = 1/\theta_0, F_r = V/\sqrt{gH_0} \end{aligned} \quad (21)$$

V : 断面の平均流速, B_0 : 水面幅, R_0 : 最小曲率半径, L : 蛇行長さ, θ_0 : 最大偏角, H_0 : 平均水深となる, ε_{zz} は渦動粘性係数, F_r : フルード数である。

分子粘性応力はレイノルズ応力と比べて、小さいとして無視すれば、山田³⁾提案した座標変化手法による、 $x^i = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ と定義して、図-3 に参考して、Sine Generated Curve に従う無次元化基礎方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \lambda \frac{\partial v}{\partial n} [(1 + \varepsilon n \operatorname{sinks})] + (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda u \frac{\partial u}{\partial s} + \lambda (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) v \frac{\partial u}{\partial n} \\ + (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) w \frac{\partial u}{\partial z} (\varepsilon \lambda u \operatorname{sinks} \cdot v) \\ - \left(\frac{1}{F_r^2}\right) \sin \alpha \cos \theta (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \\ + \frac{\varepsilon \lambda}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial s} - \varepsilon \lambda (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (u) \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda u \frac{\partial v}{\partial s} + \lambda \varepsilon (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) v \frac{\partial v}{\partial n} \\ + (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) w \frac{\partial v}{\partial z} - \varepsilon \lambda u^2 \operatorname{sinks} \\ + \left(\frac{1}{F_r^2}\right) (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \left(\sin \alpha \sin \theta + \lambda \frac{\partial p}{\partial n} \right) \\ - \lambda \varepsilon (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (v) \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda u \frac{\partial w}{\partial s} + \lambda \varepsilon (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) v \frac{\partial w}{\partial n} + (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) w \frac{\partial w}{\partial z} \\ + \left(\frac{1}{F_r^2}\right) (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \left(\cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ - \lambda^2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\varepsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (u) \right] \\ - \varepsilon \lambda^2 \frac{\partial}{\partial n} [(1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) \cdot \varepsilon_z \frac{\partial}{\partial z} (v)] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

(22) は連続式である、(23)、(24)、(25) は \tilde{x}^1 , \tilde{x}^2 , \tilde{x}^3 方向の運動方程式である。

無次元下水理量を使って、前に仮定した条件で、境界条件

を以下のように仮定とする。

$$z = 0 : u = v = w = 0 \quad (26)$$

$$z = 1 : \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$(1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) w = \varepsilon \lambda u \frac{\partial h}{\partial s} + \lambda (1 + \varepsilon n \operatorname{sinks}) v \frac{\partial h}{\partial n} \quad (27)$$

$$n = \pm 1 : v = 0 \quad (28)$$

(2) 摂動法による解析

変数については摂動パラメーター ε に関して 3 次の項まで展開するものとする。関数形が以下のようになる

$$\begin{aligned} u &= u_{10} + n u_{11} \operatorname{sinks} + n u_{12} \operatorname{cosks} + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) u_{20} \\ &+ \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) u_{21} \sin 2ks + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) u_{22} \cos 2ks \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} v &= v_{10} + (1 - n^2) v_{11} \operatorname{sinks} + (1 - n^2) v_{12} \operatorname{cosks} \\ &+ n(1 - n^2) v_{20} + n(1 - n^2) v_{21} \sin 2ks \\ &+ n(1 - n^2) v_{22} \cos 2ks \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} w &= w_{10} + n w_{11} \operatorname{sinks} + n w_{12} \operatorname{cosks} + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) w_{20} \\ &+ \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) w_{21} \sin 2ks + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) w_{22} \cos 2ks \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} h &= h_{10} + n h_{11} \operatorname{sinks} + n h_{12} \operatorname{cosks} + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) h_{20} \\ &+ \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) h_{21} \sin 2ks + \left(n^2 - \frac{1}{3}\right) h_{22} \cos 2ks \end{aligned} \quad (32)$$

S に関して 0 から $2\pi/k$ まで、n に関して -1 から 1 まで積分する。

(3) 解析結果

摂動法における、s 方向の流速 u を一次解まで求めた、n 方向の流速 v が小さくて、一次解の変化が非常に小さいため、二次解まで求めた。実験により、計算する条件は表-1 に示す。水路概要を図-6 に示す。

表-1 水路に対する計算条件

蛇行長	水路幅	偏角	平均水深
35.34m	1.83m	$\pi/4$	0.156m
Fr	ε_{zz}	平均流速	曲率半径
0.17	0.0078	21.0cm/s	7.16m

計算結果を図-8 から図-11 までに示す。

Johannesson and Parker による、摂動展開する場合、

$$\bar{u}_s \doteq v_2 \varepsilon^2 \bar{u}_n \quad (31)$$

二次流速 \bar{u}_s と一次流速 \bar{u}_n の関係を上式になるから、解析結果の平均値を用いて、計算した水路底面にあるエクマン境界層の主流速分布を解析する。計算する時、エクマン境界層の渦動粘性係数について、1000m 高さを持つ境界層内の渦動粘性係数は $5m^2 \cdot s^{-1}$ に相当するにより、計算した蛇行水路内の平均水深と渦動粘性係数の比が同じであることがわかる。

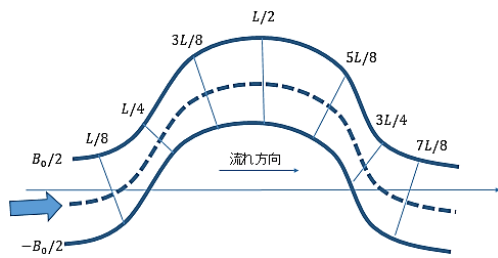


図-7 水路概要

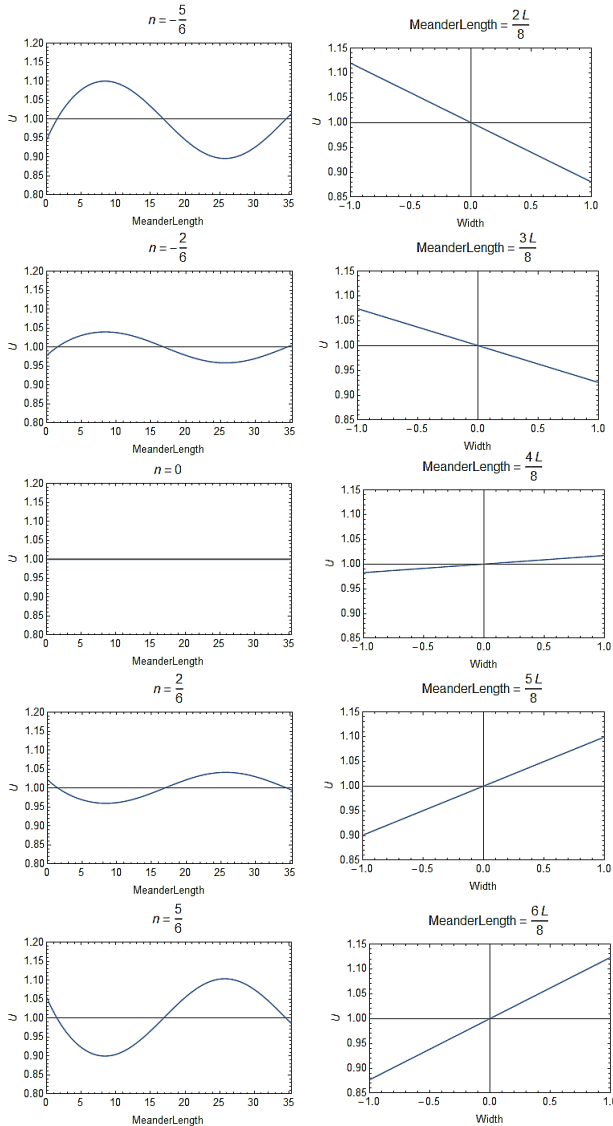


図-8 主流流速の縦断分布

図-9 主流流速の横断分布

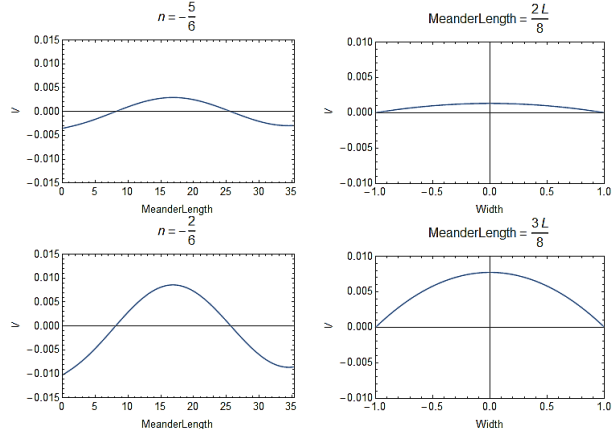
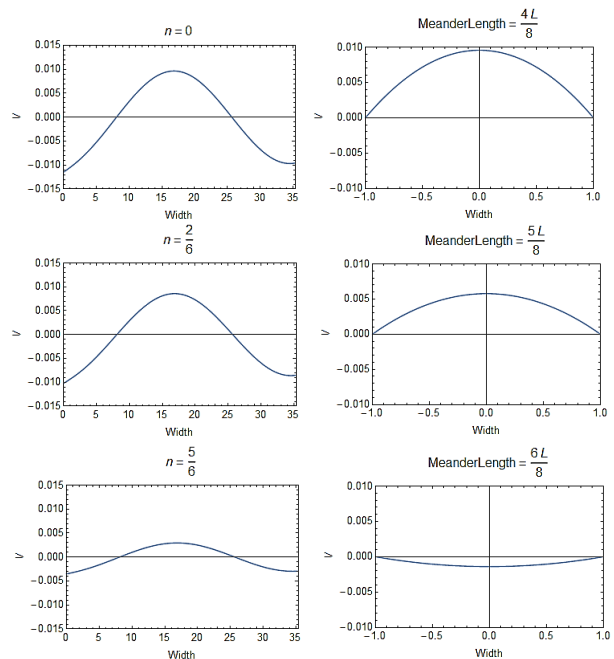


図-10 vの縦断分布

図-11 vの横断分布



境界層内流速に高さの関係

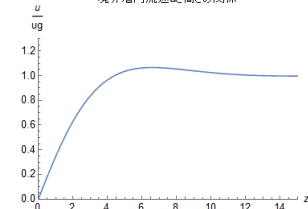


図-12 境界層ない主流の速度と高さの関係

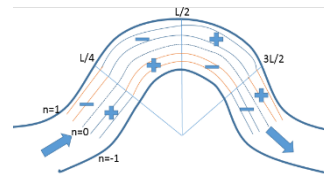


図-13 水路流速分布

5 まとめ

解析結果から見ると、主流速と平均流速の比が同じになる時、水深が4.48cmであることが分かる。水路底面にあるエクマン境界層の高さの割合は大体 28.7%である。境界層内主流速の鉛直分布に平均流速を超える部分がある。螺旋流のトップの乱れ部分が続いて、上にいくの影響だと考えている。水路流速分布について、オレンジの線は減速の状況である、青い線は加速の状況である。平均流より早い場合は+である、遅い場合は-である。

参考文献

- 1) Einstein, A: The Cause of the Formation of Meanders in the Courses of Rivers and of the So-Called Baer's Law, Die Naturwissenschaften, Vol. 14, 1926.
- 2) 藤芳義男：河川の蛇行と災害, pp.1-250, 佐々木書店, 1949.
- 3) 山田拓也：一般化座標系における水面波・内部波の変形特性, p.1-165, 2004.