

安定化有限要素法による低マッハ数近似に基づく 温熱環境流れ解析手法の構築

Development of a Finite Element Method for Thermal Environmental Flow
based on Low Mach Number Approximation

15N3100006J 川口 泰斗

Taito KAWAGUCHI

Key words : Low Mach Number Approximation, Finite Element Method, natural convection

1. はじめに

わが国では近い将来、首都直下型地震の発生が予想されており、建物の密集する都市部で巨大地震が発生した場合には火災によって甚大な被害が出るのが懸念されている。そのため火災の延焼性状を正確に把握して都市火災への防災減災対策を講じる必要があり、都市部における高精度な火災シミュレーション手法の構築が求められている。既往の研究では直交格子を用いた差分法による火災時の気流解析等¹⁾が行われてきたが、都市の複雑形状を正確に考慮することは困難といえる。そこで本研究では任意形状への適合性に優れた有限要素法を用いて都市の複雑形状を正確に考慮可能な高精度な火災時の温熱環境流れ解析手法の構築を目的とする。

一般的な都市の温熱環境解析で用いられる Boussinesq 近似は温度差が約 30 以下の場合に適用が限られる。そこで本論文では火災シミュレーション構築のための基礎的研究として、温度差が非常に大きい条件でも適用可能な低マッハ数近似に基づく温熱環境流れ解析手法を提案する。そして数値解析例として、正方形 Cavity 内自然対流解析を行い、参照解及び実験値との比較を行うことで本手法の妥当性の検証を行う。なお解析は Rayleigh 数を変化させて、層流状態及び乱流状態での検証を行う。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

低マッハ数近似は圧縮性 Navier – Stokes 運動方程式をもとにして、流れのマッハ数が小さいことを仮定して得られる近似である。特徴としては大きな温度変化に伴う、密度の変化を考慮できる点である。低マッハ数近似を用いた Navier – Stokes 運動方程式、連続式、エネルギー方程式および状態方程式を以下に示す。

Navier – Stokes 運動方程式:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - G_a (\rho - 1) \delta_{i3} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

連続式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

エネルギー方程式:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3)$$

状態方程式:

$$\rho = \frac{1}{(\beta \Delta T T + 1)} \quad (4)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の流速、 p は圧力、 T は温度、 ρ は密度、 $\Delta T (= T_h - T_c)$ は高温壁と低温壁の温度差、 δ_{i3} はクロネッカーのデルタ、 G_a は Galilei 数、 Pr は Prandtl 数、 Ra は Rayleigh 数である。ただし無次元数は以下のように定義される。

$$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2} = \frac{Ra}{\beta \Delta T Pr} \quad (5)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (6)$$

$$Ra = g\beta \Delta T \frac{L^3}{\alpha \nu} \quad (7)$$

(2) 流れ場の離散化

流れ場の離散化には、速度場と圧力場を分離して解く分離型解法 (流速修正法) を用いる。分離型解法では、基礎方程式に対して時間方向の離散化を行い、速度場と圧力場を分離し、それに対して安定化有限要素法 (SUPG 法)³⁾ を適用する。まず基礎方程式に対して時間方向の離散化 (陽的 Euler 法) を行い、発散をとることで以下の式を得る。

中間流速式:

$$\rho \tilde{u}_i = \rho u_i^n - \Delta t \left(\rho u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) - G_a (\rho^n - 1) \delta_{i3} \right) \quad (8)$$

圧力の Poisson 方程式:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (9)$$

流速修正の式:

$$\rho u_i^{n+1} = \rho \tilde{u}_i - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (10)$$

中間流速式に対しては SUPG 法に基づく安定化有限要素法を、圧力の Poisson 方程式及び流速修正の式に対し

ては Galerkin 法に基づく有限要素法をそれぞれ適用すると以下のような弱形式を得る．

中間流速式：

$$\int_{\Omega} w_i (\rho \tilde{u}_i - \rho u_i^n) d\Omega + \Delta t \left(\int_{\Omega} w_i \rho u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) d\Omega - \int_{\Omega} w_i G_a (\rho^n - 1) \delta_{i3} d\Omega \right) + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg} \bar{u}_k \frac{\partial w_i^h}{\partial x} \left(\rho \tilde{u}_i - \rho u_i^n + \Delta t \left(\rho u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) - G_a (\rho^n - 1) \delta_{i3} \right) \right) d\Omega = 0 \quad (11)$$

圧力の Poisson 方程式：

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega} P^* (\rho^{n+1} - \rho^n) d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} P^* \frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (12)$$

流速修正の式：

$$\int_{\Omega} w_i \rho u_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} w_i \rho \tilde{u}_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} w_i \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (13)$$

ただし， w_i ， P^* はそれぞれ流速と圧力の重み関数である．また， Ω_e は要素の領域， \tilde{u}_i は移流速， τ は安定化パラメータ， Δt は微小時間増分量を表す．次に，弱形式に対して P1/P1 (流速・圧力一次補間) 要素を用いて空間方向の離散化を行い，以下に示す有限要素方程式を導く．

中間流速式：

$$(M + M_{\delta}) \rho \tilde{u}_i = (M + M_{\delta}) \rho u_i^n - \Delta t \{ (K + K_{\delta}) u_i^n + S u_i^n + G_a (M + M_{\delta}) (\rho^n - 1) \delta_{i3} \} \quad (14)$$

圧力の Poisson 方程式：

$$A p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t^2} M (\rho^{n+1} - \rho^n) - \frac{1}{\Delta t} H \rho \tilde{u}_i \quad (15)$$

流速修正の式：

$$M \rho u_i^{n+1} = M \rho \tilde{u}_i - \Delta t H p^{n+1} \quad (16)$$

ここで， M 質量行列， K は移流行列， S は発散行列， H は圧力行列， A は粘性項を表す．また，添え字 δ は SUPG 項に起因するものを表す．

(3) 温度場の離散化

温度場の空間方向の離散化には，SUPG 法³⁾に基づく安定化有限要素法を適用する．エネルギー方程式に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素方程式を適用すると以下の弱形式を得る．

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega - \frac{1}{\rho Pr} \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{supg} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} w S d\Gamma \quad (17)$$

弱形式に対して P1/P1 (流速・圧力一次補間) 要素を用いて空間方向の離散化を行うと，以下の有限要素方程式を得る．

$$(M + M_{\delta}) \frac{\partial T}{\partial t} + \left(K(u_i) + K_{\delta}(u_i) \frac{1}{\rho Pr} S \right) T = 0 \quad (18)$$

一方，時間方向の離散化には 2 次精度 Crank-Nicolson 法を用いて離散化を行う．

$$\left(\frac{M + M_{\delta}}{\Delta t} + \theta (K(u_j) + K_{\delta}(u_j) + \frac{1}{\rho Pr} S) \right) T^{n+1} = B^n \quad (19)$$

ここで， B^n はエネルギー方程式の既知項をまとめたものである．なお連立一次方程式の解法には，Element-by-Element 処理を施した GPBi-CGSTAB2 法を用いる．

3. 数値解析例

(1) Cavity 内自然対流解析 (低 Ra 数流れ)

層流状態における本手法の妥当性を検討するため，図-1 に示すような三次元 Cavity 内自然対流解析を取り上げ， Ra 数を固定し， $\beta \Delta T$ を変化させた解析を行う．表-1 に計算条件を示す．表中の ΔT は基準温度 $T_0 = 15$ とした場合に相当する温度差を表す．初期条件は流速に関して全領域で 0，境界条件は流速に関して全壁面で 0，圧力は解析領域の中心 1 点に 0 を与え，温度に関しては高温壁面で $T = 0.5$ ，低温壁面で $T = -0.5$ とした．解析メッシュは壁近傍で最小メッシュ幅が 1.113×10^{-2} となるように一辺を 30 分割した三角形メッシュを用いる．

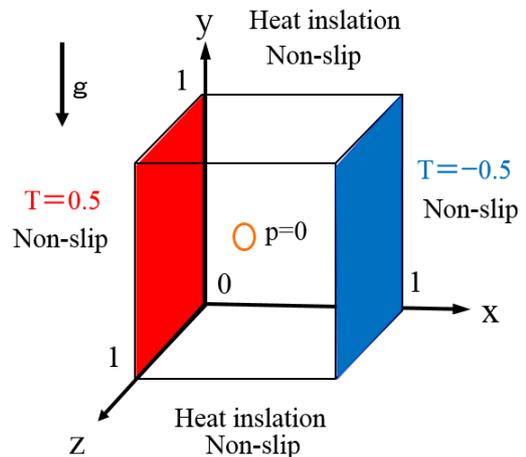


図-1 解析領域・境界条件

表-1 解析条件

case	支配方程式	Ra	$\beta\Delta T$	ΔT
case1	Boussinesq 近似	10^6	-	-
case2	低マッハ数近似	10^6	0.104	30
case3	低マッハ数近似	10^6	0.500	144
case4	低マッハ数近似	10^6	1.040	300

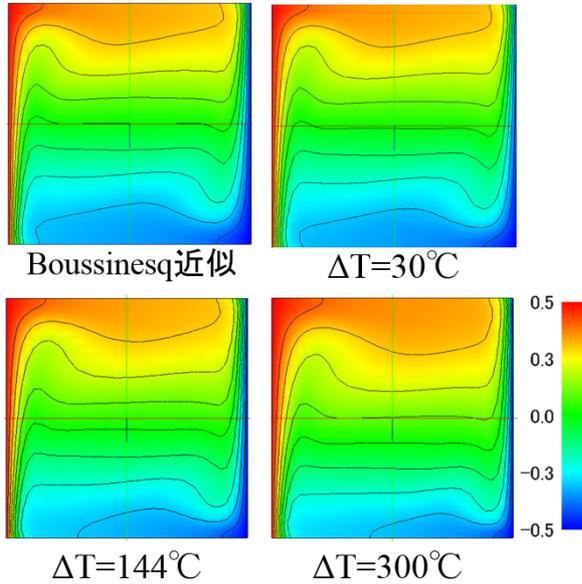


図-2 断面温度分布図

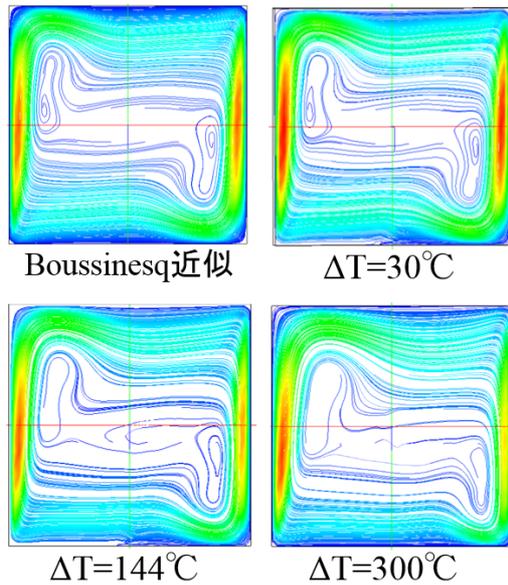


図-3 断面流線分布図

図-2 に定常状態における中心断面 ($z = 0.0$) における温度分布図を、図-3 に流線分布図を示す。これらの図から温度分布、流線分布ともに Case1 と Case2 はよく一致した結果となっており、上下左右で対称な分布をしている。一方、温度差が大きい条件では、高温壁と低温壁で非対称な分布になっている。これは低マッハ数近似では高温空気の密度変化を捉えているためだと考えられる。また、図-4 および 図-5 に中心軸上における流速

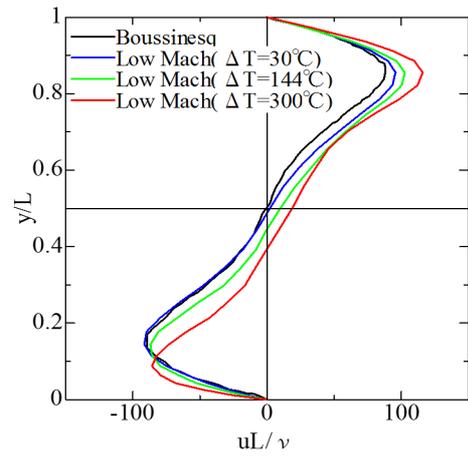


図-4 中心軸上流速

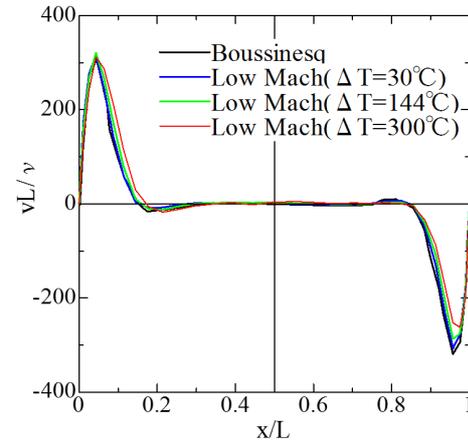


図-5 中心軸上流速

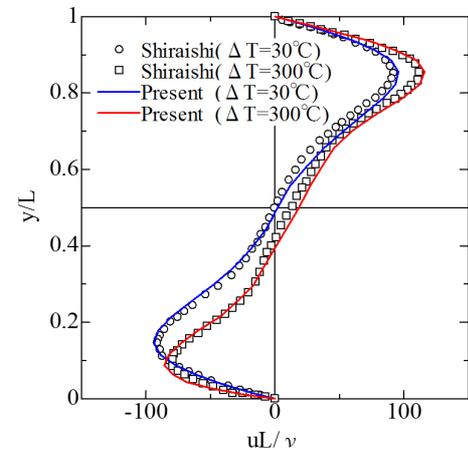


図-6 中心軸上流速 (参照解との比較)

分布、図-7 に白石らの解析結果²⁾との比較を示す。この図から流速分布が参照解と定性的に良い一致を示しており、層流状態において妥当な解析結果が得られていることが確認された。

(2) Cavity 内自然対流解析 (高 Ra 数流れ)

乱流状態における本手法の妥当性を検討するため、高 Ra 数流れの二次元 Cavity 内自然対流解析を取り上げ、Cheesewright らの実験結果⁵⁾との比較を行う。表-2 に計算条件を示す。初期条件及び境界条件は三次元解析と同様である。

表-2 解析条件

case	Ra	$\beta\Delta T$	ΔT	Min. Δx
case1	1.58×10^6	0.138	40	0.00464
case2	1.58×10^7	0.138	40	0.00464
case3	1.58×10^8	0.138	40	0.00464
case4	1.58×10^9	0.138	40	0.00216

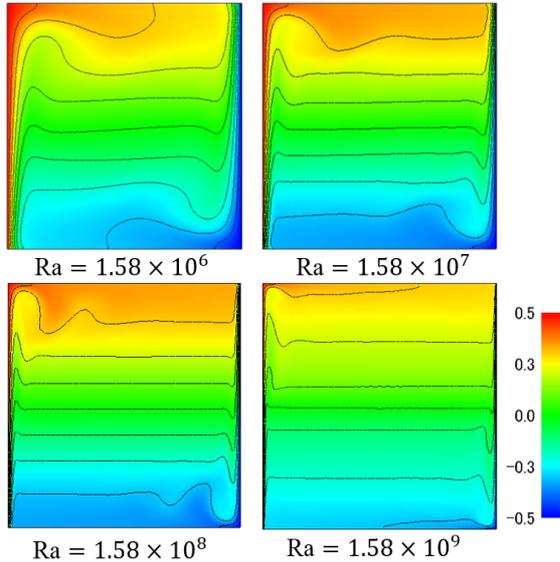


図-7 温度分布図

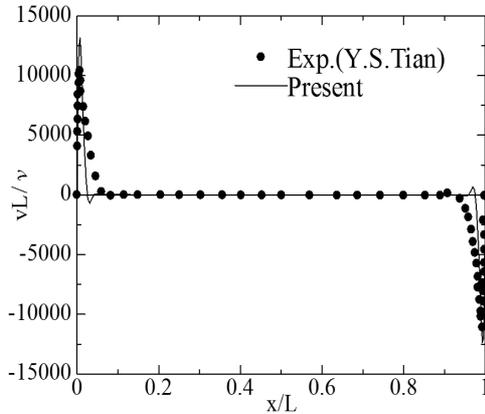


図-8 流速分布図

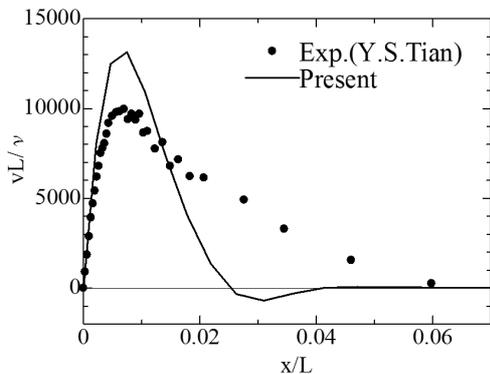


図-9 流速分布図 (拡大図)

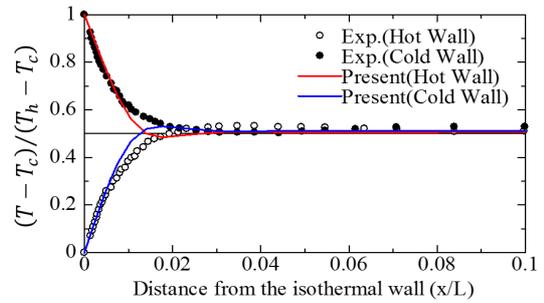


図-10 温度分布図

閉空間内の自然対流では $Ra = 10^8$ 以上で流れが乱流状態となることが知られているが、本解析でも case3, case4 では流れが乱流状態となり、非定常な流れとなった。図-8 及び図-9 に case4 における流速分布の時間平均の実験値との比較を示す。この図から高温壁側の流速分布が実験値と大きく異なっていることが分かる。低温壁側は流速のピークは概ね一致するが分布形状は異なっている。これは高温壁、低温壁付近で発生する渦を捉えられていないためだと考えられる。図-10 には case4 における温度分布の時間平均の実験値との比較を示す。壁近傍から $x/L=0.01$ までは温度分布はよく一致するが、 $x/L=0.01$ から $x/L=0.02$ の部分の温度分布には若干の差異が見られ、同様の要因が考えられる。

4. おわりに

本報告では、低マッハ数近似を用いた有限要素法に基づく温熱環境流れ解析手法の構築を行った。本手法の妥当性を検証するため、cavity 内自然対流解析を行い、以下の結果を得た。

- 低 Ra 数流れの解析において、既存の数値解析結果との比較を行い、定性的に良い一致が示され、層流状態での本手法の妥当性が示された。
- 高 Ra 数流れの解析において、壁面近傍での流速分布に実験結果との差異が見られたため、乱流状態の解析には課題がある。

今後の課題として、乱流モデルの導入が挙げられる。

参考文献

- 1) 白石靖幸, 加藤信介, 吉田伸治, 村上周三: 都市火災伝搬における火の粉飛散の数値解析, 日本建築学会計画系論文集, 第 546 号, pp.187-192, 2001.
- 2) 白石靖幸, 加藤信介, 石田義洋: 低マッハ数近似との比較による Boussinesq 近似の予測精度の検討, 日本建築学会環境系論文集, 第 577 号, pp.13-18, 2004.
- 3) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advance in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1992.
- 4) Helmi MLAOUAH, 辻俊博, 長野靖尚: 温度差の大きい閉空間における熱対流, 日本機械学会論文集 (B 編), 62 巻, 594 号, pp.346-352, 1996.
- 5) R.Cheesewright, K.J.King, S.Ziai: Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows, *ASME*, Vol. HTD-60, pp.75-81, 1986.