修士論文要旨 (2016 年度)

可分計画法を用いた区分的線形抵抗回路の全解探索法

Finding All Solutions of Piecewise-Linear Resistive Circuits Using Separable Programming

電気電子情報通信工学専攻　岡本　大輝
Taiki　OKAMOTO

1. まえがき

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形抵抗回路の全解探索は回路シミュレーションにおいて重要な問題の一つである．この問題を解決するために、近年様々な効率的なアルゴリズムが提案されている [1]–[5]．特に，線形計画法を用いて解の非存在判定を行う非線形回路の全ての解を求める効率的なアルゴリズム [3] や回路方程式を整数計画問題に定式化し，既存の整数計画ソルバーを用いて全ての解を求める実現容易性に優れた方法 [4], [5] など数理計画法を用いた方法がある．

本研究で用いる可分計画法は，非線形計画問題を解く場合に用いられる数理計画法である．可分計画問題は，既存のシンプレックス法に「制限付き基底の入れ替え」という制限を加えた修正シンプレックス法を用いることで容易に解くことができる．

本論文では，区分的線形抵抗回路の回路方程式を可分計画問題に置き換え，それを修正シンプレックス法を用いて解くことで，効率的に全解探索を行う．また，双対シンプレックス法を適用することで可分計画法のピボット演算回数を減少させる方法を提案する．

2. 数理計画法を用いた研究

非線形回路の全ての解を求める方法として，数理計画法である線形計画法，整数計画法，可分計画法を用いた研究が行われている．本章ではそれぞれの研究の違いについて説明する．

まず，線形計画法を用いた研究の概要を図 1 に示す．非線形方程式をそれよりもやさしい線形計画問題に置き換えることにより，解の非存在判定を行うことができる．この判定方法を LP テストと呼ぶ．LP テストは従来の判定法よりも強力であり，区間解析のような分枝限定法の限定

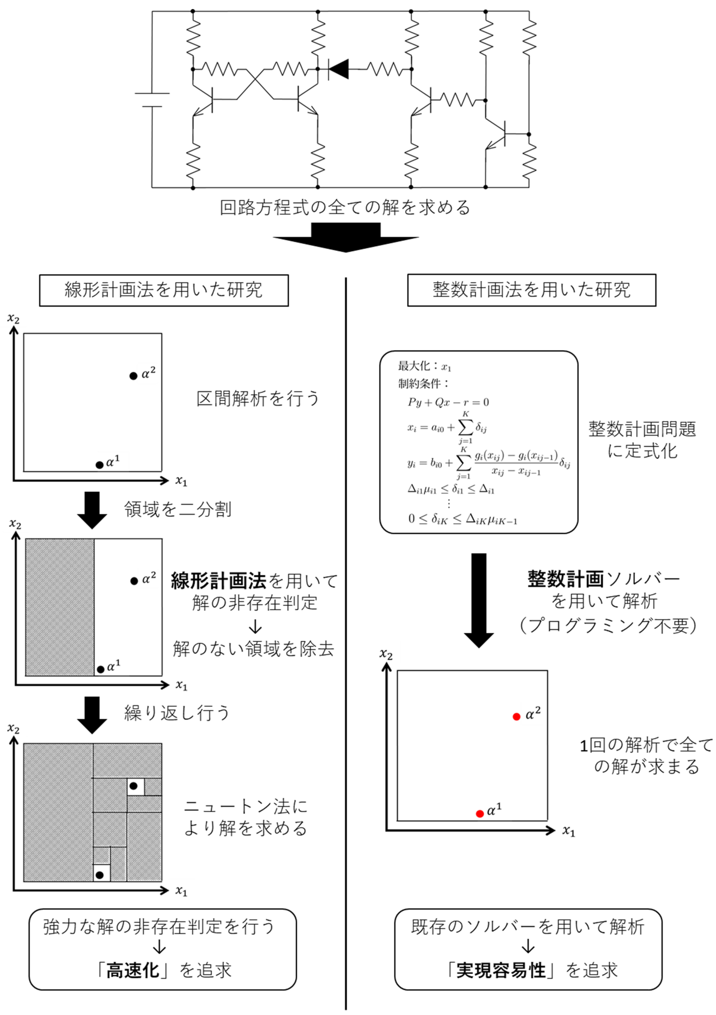

図 1　線形計画法及び整数計画法を用いた研究

操作に用いることで，全体の計算効率を改善することができる．線形計画法を用いた研究は，強力な解の非存在判定により，区間解析の「高速化」を追求した研究である．

次に，整数計画法を用いた研究の概要を図 1 に示す．近年，整数計画法の分野の発展により大規模な問題が解けるようになった整数計画ソルバーが存在する．また，非線形方程式は実質的に離散系の区分的線形方程式に置き換えることができる．そのため，非線形回路を整数計画問

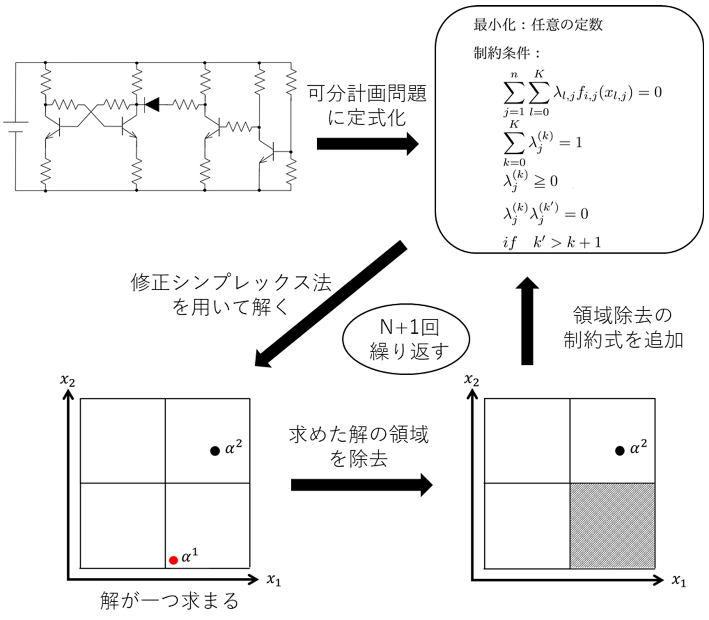

図 2　可分計画法を用いた研究

題に置き換えることでプログラミングをしないですべての解を求めることができる．整数計画法を用いた研究は，既存のソルバーを用いることによりプログラミングを必要としない「実現容易性」を追求した研究である．

線形計画法や整数計画法を用いた研究は非線形の可分に近い性質を利用している．可分を対象とした数理計画法として，1963 年に提案された可分計画法 [6] という歴史の中に埋もれてしまった方法がある．この方法は可分を対象としているため，区分的線形回路に直接応用することが可能である．可分計画法を用いた研究の概要を図 2 に示す．区分的線形回路を可分計画問題に定式化し，解の個数 $N+1$ 回解析を行うことですべての解を求めることのできる「最高速」を追求した方法が可分計画法の研究である．また，可分計画法は歴史に埋もれていたため，専用のソルバー等は存在しないが，今後の発展次第では可分計画法が再評価され発展が期待される研究である．

3.　対象とする問題

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\triangle}{=} \boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

ただし，$\boldsymbol{x}$ は非線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{g}$ はこれらの抵抗の特性を表す区分的線形関数，$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{r}$ は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．本研究では式 (1) の解を求めることを考える．

3.1　定式化手法

式 (1) は変数分離されている方程式であるため，区間 $[k, k+1]$ 上の点 $x_j^{(k)} \leqq x_j \leqq x_j^{(k+1)}$, $f_{ij}(x_j)$ は内分比を示す変数 λ を用いることで，以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_j) &= \lambda_j^{(k)} f_{ij}(x_j^{(k)}) + \lambda_j^{(k+1)} f_{ij}(x_j^{(k+1)}) \\ x_j &= \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)} + \lambda_j^{(k+1)} x_j^{(k+1)} \end{aligned} \qquad (2)$$

これを解析領域 $[l_j, u_j]$ の全体で考えると式 (1) は，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} f_{ij}(x_j^{(k)}) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (3a)$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)} \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3b)$$

$$\sum_{k=0}^{K} \lambda_j^{(k)} = 1 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (3c)$$

$$\lambda_j^{(k)} \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 0, 1, \cdots, K \qquad (3d)$$

$$\lambda_j^{(k)} \lambda_j^{(l)} = 0 \quad \text{if} \quad l > k+1; \quad k = 0, 1, \cdots, K-1 \qquad (3e)$$

と変換することができる．ここで条件 (3e) は隣接条件といわれるもので，多くとも二つの λ が値を持ち，λ は隣接する必要があることを示している．

4.　可分計画法を用いた全解探索法

ここでは，可分計画法を用いて区分的線形抵抗回路の解を求め，制約式を追加することにより区分的線形抵抗回路のすべての解を求める方法について述べる．また，双対シンプレックス法を用いてピボット演算回数を減少させる方法について述べる．

4.1　可分計画法を用いた解析法

式 (1) を解くために以下のような可分計画問題を考える．

最小化：任意の定数

制約条件：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{K}\lambda_{l,j}f_{i,j}(x_{l,j})=0 \quad i=1,2,\ldots,n\\
&\sum_{k=0}^{K}\lambda_j^{(k)}=1\\
&\lambda_j^{(k)}\geqq 0 \quad j=1,2,\ldots,n;\ k=0,1,\ldots,K\\
&\lambda_j^{(k)}\lambda_j^{(k')}=0\\
&if \quad k'>k+1;\ k=0,1,\ldots,K-1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

可分計画問題 (4) の制約条件を満たす点はすべて式 (1) と等価となるため目的関数は任意の定数とすることができ，この問題を解くことで近似解を求めることができる．可分計画問題 (4) は式 (3e) の隣接条件を満たすように従来のシンプレックス法のアルゴリズムに「制限付き基底の入れ替え」と呼ばれる制限を加える事により解く事ができる．

制限付き基底の入れ替えでは，基底に入ろうとしている λ が変数 x_i 方向に関する λ とすると，基底の入れ替えができるのは以下の場合である．

- x_i に関する λ が一つも基底に存在しない場合．
- x_i に関する λ が一つ基底に存在し，その基底と入れ替える場合．
- x_i に関する λ が一つ基底に存在し，その基底と新たに基底にしたい λ が隣接する場合．
- x_i に関する λ が二つ基底に存在し，どちらかの基底と入れ替えを実行しても隣接性が保持される場合．

以上のいずれの条件も満たさない場合は，基底の入れ替えが不可能である．その場合は他の λ を選び，基底の入れ替えを行う．この制限付き基底の入れ替えを適用したシンプレックス法を本論文では修正シンプレックス法と呼ぶ．

4.2 制約条件の追加

前節で述べた求解法において n 変数の区分的線形方程式を解いたときの λ の関係式は

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(k_j)}+\lambda_j^{(k_j+1)})=n \tag{5}$$

となっている．ここで以下の λ の関係式

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(k_j)}+\lambda_j^{(k_j+1)})<n \tag{6}$$

を制約条件に追加し，再び修正シンプレックス法で解析

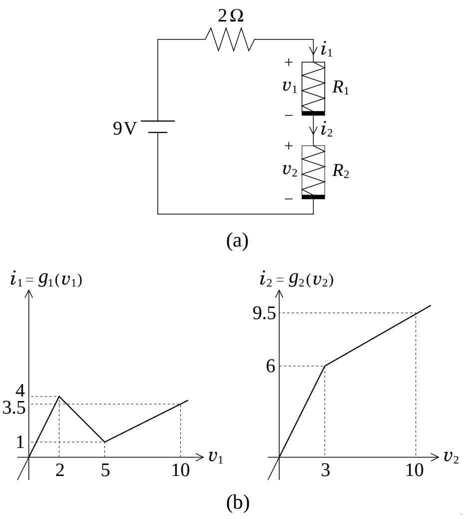

図 3 (a) 例題回路 1 と (b) 区分的線形抵抗 R_1, R_2 の電圧–電流特性

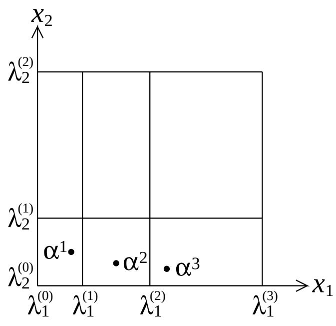

図 4 例題回路 1 の解領域

を行うことで，得られた解領域を解析対象から外し次の新しい解を得ることができる．これをその問題が持つ解の個数 $N+1$ 回繰り返し行うことで，すべての解を求めることができる．

ここで，例として文献 [1] にある図 3，図 4 のような 3 つの解をもつ 2 変数の区分的線形方程式を考える．

$$
\begin{aligned}
2g_1(v_1)+v_1+v_2-9=0\\
2g_2(v_2)+v_1+v_2-9=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

まず，最初の修正シンプレックス法の計算で一つ目の解 α_1 が求まったとする．この時，以下の λ の関係式が得られる．

$$(\lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})=2 \tag{8}$$

ここで，先ほどの手法を用いて次の λ の関係式を式 (4) の制約条件に追加する．

$$(\lambda_1^{(0)}+\lambda_1^{(1)})+(\lambda_2^{(0)}+\lambda_2^{(1)})<2 \tag{9}$$

これにより解が得られた領域を解析領域から外すことができる．ここで式 (4) に式 (9) を加えた新たな可分計画

問題を再び修正シンプレックス法を用いて解析を行うことで，二つ目の解 α_2 を求めることができる．先ほどと同様の手法で，二つ目の解の λ の関係式を導き，以下の式を制約条件に加える．

$$(\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}) + (\lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)}) < 2 \qquad (10)$$

これにより α_2 が存在する領域を解析領域から除外したことになる．ここで更に式 (9),(10) を式 (4) に加えた新たな可分計画問題を解くことで三つ目の解 α_3 を求めることができる．

$$(\lambda_1^{(2)} + \lambda_1^{(3)}) + (\lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)}) < 2 \qquad (11)$$

同様に式 (11) を新たに加え解析を行うと，今度は解析領域内に解が存在しないという結果が出力されるので解析を終了する．結果，$N+1$ 回だけ解析を繰り返すことにより解析領域内に存在する全ての解を求めることができる．

4.3 双対シンプレックス法の適用

可分計画法を用いた全解探索法では修正シンプレックス法が解の個数 $N+1$ 回実行される．シンプレックス法は大規模な問題に対して多くのピボット演算を必要とするため，フェーズ I から始めると全体で要する総ピボット演算回数は莫大なものとなる．そこで，可分計画法に双対シンプレックス法を用いることで，非常に少ないピボット演算で効率的に全解探索を行う方法を提案する．

双対シンプレックス法を用いる場合，解を得たときの最適実行可能タブローに制約条件を追加する．このとき，式 (6) は基底変数を用いているためタブローに追加することができない．式 (6) をタブローに追加するために非基底変数のみを用いて次のように表す．

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} \lambda_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(k_j)} + \lambda_j^{(k_j+1)}) \geqq \varepsilon \qquad (12)$$

ただし，ε は十分小さな正の値とする．式 (12) を追加することで双対実行可能タブローとなる．このタブローから双対シンプレックス法をスタートさせることでフェーズ I を行わずに解を得ることができ，ピボット演算回数を減少させることができる

5. 数 値 例

例 1：文献 [4] で扱っている 4 つのトランジスタ回路に対して可分計画法を用いて全解探索を行う．本手法を適用したときのピボット回数を表 1 に示す．

表 1　例 1 の計算結果

回路	n	N	総ピボット回数	
			可分計画法	線形計画法
Tr4 回路	8	9	269	1 754
Tr4D1 回路	9	3	121	1 752
Tr6D3 回路	15	11	602	21 657
Tr9D4 回路	22	1	171	7 217

例 2：図 3 の例題回路に対し，双対シンプレックス法を適用した可分計画法を用いて全解探索を行う．ピボット回数は双対単体法を適用した場合 12 回，しなかった場合 22 回となった．

6. む す び

本研究では，可分計画法を用いた区分的線形抵抗回路の全解探索法を提案した．本手法は，従来のシンプレックス法に簡単な制限を加えるだけで実装が可能であり，区分的線形抵抗回路の持つ解の個数 $N+1$ 回解析を行うことですべての解を求めることができる．また，可分計画法に双対シンプレックス法を用いることで計算効率を向上させる方法を提案した．

参 考 文 献

[1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," Int. J. Circuit Theory Appl., vol.10 no.3, pp.201–229, Jul. 1982.

[2] A. Ushida and T. Nakamura, "Interval analysis of nonlinear resistive circuits," Proc. Joint Tech. Conf. Circuits/Systems, Computers and Communications, pp.499–505, Sapporo, Japan, Jun. 1989.

[3] K. Yamamura, H. Kawata, and A. Tokue, "Interval solution of nonlinear equations using linear programming," BIT Numerical Mathematics, vol.38 no.1, pp.186–199, Mar. 1998.

[4] K. Yamamura and N. Tamura, "Finding all solutions of separable systems of piecewise-linear equations using integer programming," J. Computational and Applied Mathematics, vol.236, no.11, pp.2844–2852, May 2012.

[5] K. Yamamura and S. Ishiguro, "Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using integer programming," Reliable Computing, vol.23, pp.73–96, Jul. 2016.

[6] C.E. Miller, "The simplex method for local separable programming," in Recent Advances in Mathematical Programming, eds. R.L. Graves and P. Wolfe, pp.89–100, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

[7] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 30, no. 6, pp. 567–586, Nov. 2002.

研 究 業 績

[1] 岡本大輝，滝裕至，山村清隆，"整数計画法を用いた非線形回路の混合方程式及び状態方程式の導出，" 2015 年電子情報通信学会総合大会講演論文集，A-2-32, Mar. 2015.