

双対単体法を用いた非線形回路の全解探索法に関する研究

Finding All Solutions of Nonlinear Circuits Using the Dual Simplex Method

電気電子情報通信工学専攻 高宮 将弘

Masahiro TAKAMIYA

1. まえがき

非線形回路のすべての解 (直流動作点) を求める効率的なアルゴリズムを確立することは、信頼性の高い回路設計を行ううえで重要な課題となる。この問題は回路に含まれる非線形素子の数 n の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する、非常に難しい問題として知られている。例として、全解探索法のソフトウェアである RealPaver の四つのアルゴリズムを後述する 4 章の例 1 の回路に適用したときの計算時間を表 1 に示す。変数の数 n の増加とともに計算時間が爆発的に増大していることが分かる。

全解探索問題に対してはこれまでに様々なアルゴリズムが提案されている [1]~[10]。これらのアルゴリズムの中でも、線形計画法を用いるアルゴリズムは特に高速であることが知られている。本論文では、線形計画法の一種である双対単体法を用いた、非線形回路のすべての解を求める非常に効率的なアルゴリズムを提案する。

2. 基本となるアルゴリズム

n 個の非線形抵抗を含む直流回路は、一般に次のような形の非線形方程式で記述することができる。

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \quad (1)$$

線形計画法を用いるアルゴリズムでは、 n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら、その領域内に解が存在するか否かを確認していく。そして「解の存在と一意性」に関する十分条件が成立した場合はその解を求め、「解の非存在」に関する十分条件が成立した場合はその領域を除去する。また、それらいずれの十分条件も成立しない場合はその領域を 2 分割し、それぞれに対して同様の手順を繰り返す。

以下では、 x_i 軸上の閉区間 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を要素とする n 次元区間ベクトルを $X = ([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n])^T$ で表すことにする。幾何学的には、 X は n 次元直方体となる。

表 1 RealPaver の計算時間 (秒)

n	BC3N	BC5	weak3B	3B
10	0.18	0.10	0.26	29
20	11	3	8	343
30	396	64	139	1 522
40	9 901	832	2 085	4 248
50	230 895	9 431	78 456	10 557

定義域 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) における非線形関数 $g_i(x_i)$ の最小値と最大値をそれぞれ c_i, d_i とする。ここで式 (1) を線形等式と線形不等式で表すため、補助変数 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入し、 $y_i = g_i(x_i)$ とおく。このとき、 $a_i \leq x_i \leq b_i$ ならば $c_i \leq y_i \leq d_i$ となる。そしてこれらの線形等式・線形不等式を制約条件とする次のような線形計画問題を考える。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$Py + Qx - r = 0 \quad (2)$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$c_i \leq y_i \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ただし、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする。幾何学的には、式 (2) の不等式制約は図 1(a) に示すように非線形関数 $g_i(x_i)$ を長方形で囲むことを意味する。

明らかに式 (1) の領域 X 内の解は、 $y_i = g_i(x_i)$ とおくことにより式 (2) の制約条件を満足する。したがって式 (2) の実行可能領域が存在するか否かは、式 (2) に単体法を適用することにより確認できる。もし存在しなければ、領域 X に式 (1) の解は存在しないので、それを除去することができる。このようなテストを LP テストと呼ぶ [4],[5]。

式 (2) に単体法を適用する場合、まず変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i$, $\bar{y}_i = y_i - c_i$ により長方形を二つの不等式制約 $\bar{x}_i \leq b_i - a_i$, $\bar{y}_i \leq d_i - c_i$ と非負制約 $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$ で表し (図 1(a) の左下の直角座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)、更にスラック変数 $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を導入して式 (2) を

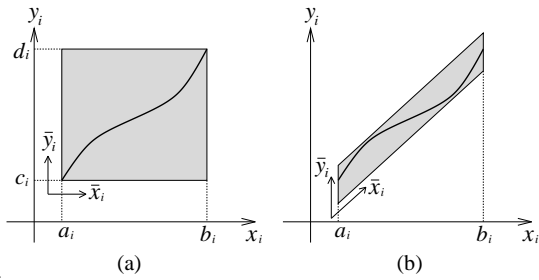


図1 平行四辺形が有効な例

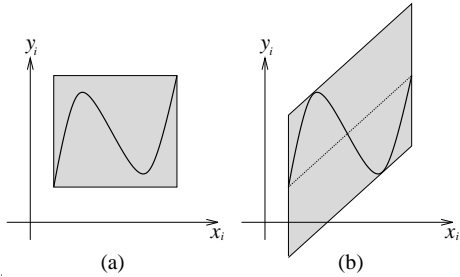


図2 平行四辺形が非効率的となる例

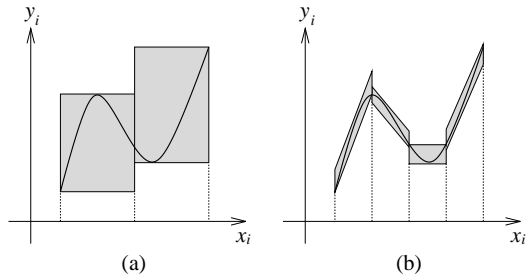


図3 長方形と平行四辺形を併用したアルゴリズム

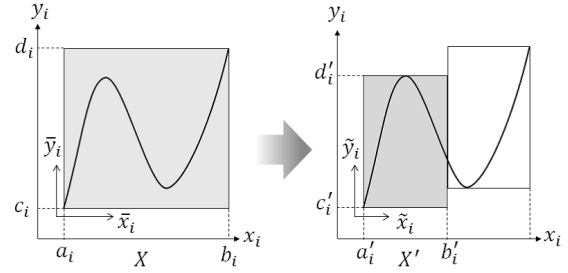


図4 長方形から長方形への切り替え

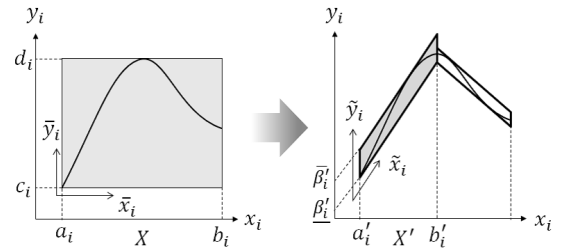


図5 長方形から平行四辺形への切り替え

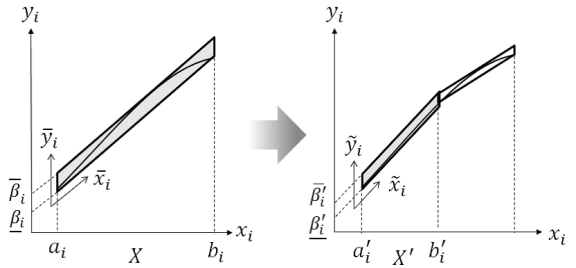


図6 平行四辺形から平行四辺形への切り替え

標準形に帰着させてから実行可能タブローを作り、反復を開始する。

また文献 [6], [7] では、双対単体法の導入により LP テストにおけるピボット演算回数を激減させる手法が提案されている。この方法は既に得られている実行可能タブロー（最適タブロー）から次の領域用の双対実行可能タブローを導き、そこから双対単体法をスタートさせるもので、1 領域当りの平均ピボット演算回数が非常に少なくなる。

ところで、一般に LP テストは非線形関数を囲む多角形の面積が小さいほど領域除去能力が強くなる。非線形関数を囲む多角形としては通常長方形が用いられるが、図 1(a) に示すように関数の非線形性の弱い部分では長方形の面積が相対的に大きくなり、非効率的となる欠点がある。これに対し、文献 [8] では非線形関数を平行四辺形で囲む LP テストが提案されている。

この方法は関数の非線形性が弱い問題に対しては図 1(b) のように効率的であるが、関数の非線形性が強い部分で

は図 2 に示すように平行四辺形の面積が長方形以上に大きくなるうえに、制約条件の数が増えるため、しばしば非効率的となる。

3. 提案アルゴリズム

本論文では、図 3 に示すようにアルゴリズムの初期の段階では長方形を使い、関数の非線形性が弱くなれば（すなわち平行四辺形の面積が長方形よりも小さくなれば）平行四辺形を用いる方法を提案する。ただし長方形から平行四辺形にそのまま切り換えると、制約条件の数が増え、タブローのサイズも大きくなる。また、切り換えた時点での双対単体法の適用が不可能になる。本論文ではこの問題を適切な変数変換により解決する。

3.1 長方形から長方形に切り換える場合

アルゴリズムの初期の段階では、図 4 に示すような「長方形を用いた LP テスト」を行う。このときの変数変換式は文献 [9] と同じになるので、本論文では省略する。

3.2 長方形から平行四辺形に切り換える場合

領域 $X = ([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n])^T$ に対する「平行四辺形を用いた LP テスト」では、線形計画問題

最大化： 任意の関数

制約条件：

$$\begin{aligned} Py + Qx - r &= 0 \\ a_i &\leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ y_i &\leq \alpha_i x_i + \bar{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ y_i &\geq \alpha_i x_i + \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

に線形計画法を適用する [8].

いま、領域 X に対する「長方形を用いた LP テスト」が完了し、次の領域 $X' = ([a'_1, b'_1], \dots, [a'_n, b'_n])^T$ で LP テストを長方形から平行四辺形に切り換えるものとする。ここでもし文献 [8] の式 (8) のような変数変換を行うと、制約条件の数が増え、タブローのサイズが大きくなる。また、切り換えた時点での双対単体法の適用が不可能になる。そこで本論文では、次のような変数変換を考える (図 1(b) の左下の斜交座標系 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を参照)。

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - a_i \\ \bar{y}_i &= y_i - \alpha_i x_i - \gamma_i \end{aligned} \quad (4)$$

このとき、平行四辺形は次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &\leq b_i - a_i \\ \bar{y}_i &\leq \bar{\beta}_i - \underline{\beta}_i \\ \bar{x}_i &\geq 0, \quad \bar{y}_i \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

この場合、制約条件の数は長方形のときと同じになる。

領域 X に対する式 (2) の最適タブローは既に得られているので、このタブローに

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \tilde{x}_i - a_i + a'_i \\ \bar{y}_i &= \tilde{y}_i - c_i + \alpha'_i \tilde{x}_i + \gamma'_i \\ \bar{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_i + b_i - b'_i \\ \bar{\mu}_i &= \tilde{\mu}_i - \alpha'_i \tilde{x}_i + d_i - \gamma'_i - \bar{\beta}'_i + \underline{\beta}'_i \end{aligned} \quad (6)$$

を代入することにより、領域 X' に対する式 (3) の双対実行可能なタブローを得ることができる。このタブローからスタートして双対単体法を行うことにより、領域 X' に対する「平行四辺形を用いた LP テスト」を行うことができる。なお、紙面の都合により式 (6) の詳細な導出過程は省略する。

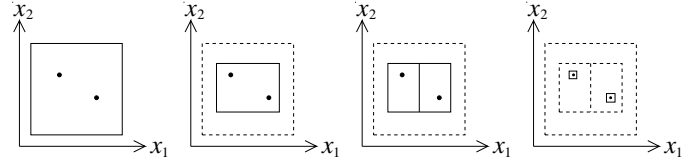


図 7 LP 縮小を用いたアルゴリズムのイメージ図

3.3 平行四辺形から平行四辺形に切り換える場合

LP テストを平行四辺形に切り換えた後は、「平行四辺形を用いた LP テスト」を継続して行うことになる。このときの変数変換式は

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \tilde{x}_i - a_i + a'_i \\ \bar{y}_i &= \tilde{y}_i - (\alpha_i - \alpha'_i) \tilde{x}_i + \alpha_i (a_i - a'_i) - \gamma_i + \gamma'_i \\ \bar{\lambda}_i &= \tilde{\lambda}_i + b_i - b'_i \\ \bar{\mu}_i &= \tilde{\mu}_i + (\alpha_i - \alpha'_i) \tilde{x}_i - \alpha_i (a_i - a'_i) + \bar{\beta}_i - \underline{\beta}_i \\ &\quad - \bar{\beta}'_i + \underline{\beta}'_i + \gamma_i - \gamma'_i \end{aligned} \quad (7)$$

となる。紙面の都合により式 (7) の導出過程は省略する。

3.4 平行四辺形を用いた LP 縮小

文献 [10] では LP 縮小と呼ばれる非常に強力な領域縮小法が提案されている。領域縮小法とは、領域 X を「 X と同じ解を含むより小さな領域」に縮小する方法のことを言う。本論文では、この LP 縮小の改良版である「平行四辺形を用いた LP 縮小」を提案する。この方法は次のような線形計画問題を考えることにより実現できる。

最大化/最小化： x_i

制約条件：

$$Py + Qx - r = 0 \quad (8)$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \leq \alpha_i x_i + \bar{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq \alpha_i x_i + \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

この方法は双対単体法の導入によりわずかな反復回数で行うことができ、また平行四辺形の導入により、より強力な領域縮小が可能となる。LP 縮小を用いたアルゴリズムのイメージ図を図 7 に示す。LP テストによる解の非存在判定と LP 縮小による領域縮小を交互に繰り返すアルゴリズムとなる。

4. 数 値 例

本章では数値実験結果をいくつか示し、提案したアルゴリズムの有効性を検証する。

表 2 計算結果 (例 1)

	探索領域数	総ピボット回数	平均ピボット回数	計算時間 (秒)
文献 [6]	206 085	98 313	0.48	21
文献 [8]	65 475	545 670	8.33	43
本手法	62 999	161 071	2.56	12

例 1: 文献 [4]~[10] で例題として解かれている n 個のトンネルダイオードを含む非線形回路を考える. $n = 100$ として文献 [6], [8] のアルゴリズムと本手法を適用したときの計算結果を表 2 に示す. 文献 [6], [8] はそれぞれ長方形だけ, 平行四辺形だけを用いた双対 LP テストアルゴリズムである.

表 2 から分かるように, 本手法では制約条件の数が少なく, また一貫して双対単体法が適用されるため, 文献 [6] の方法と同様, 1 領域当りの平均ピボット演算回数が少なくなる. またアルゴリズム全体で適切な大きさの多角形が使用されるため, 文献 [6], [8] の方法よりも探索領域数が少なくなり, 併せて計算時間の短縮が実現されている.

例 2: 例 1 の回路に, n の値を変えながら文献 [7], [9] のアルゴリズムと本手法を適用したときの結果を表 3 に示す. この表より, 本手法はこの問題を $n = 1000$ に対しては約 6 分, $n = 5000$ に対しては約 24 時間で解いていることが分かる.

例 3: その他, 文献 [10] で数値例として扱われている 4 種類のトランジスタ回路に本手法を適用したが, いずれも 0.1 秒以下ですべての解を求めることができた.

5. む す び

本論文では, 双対単体法を用いた非線形回路の新しい全解探索法を提案した. この方法は「長方形と平行四辺形を併用した LP テストアルゴリズム」に斜交座標系を用いるアイデアと適切な変数変換, 並びに LP 縮小を導入したもので, 強力な解の非存在判定と強力な領域縮小が行われるため, 非常に効率が良い.

参 考 文 献

- [1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.10, no.3, pp.201-229, July 1982.
- [2] K. Yamamura and M. Ochiai, "An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.39, no.3, pp.213-221, March 1992.

表 3 例 2 における計算時間の比較 (秒)

n	S	文献 [7]	文献 [9]	本手法
100	9	49	2	0.3
200	13	1 259	21	2
300	11	9 345	65	6
400	9	36 854	124	19
500	13	118 076	333	36
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1 000	17	∞	5 706	355
2 000	9	∞	48 805	2 846
3 000	27	∞	331 856	20 741
4 000	21	∞	∞	41 164
5 000	15	∞	∞	83 648

- [3] L.V. Kolev, "An efficient interval method for global analysis of non-linear resistive circuits," *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol.26, no.1, pp.81-92, Jan. 1998.
- [4] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.45, no.4, pp.434-445, April 1998.
- [5] K. Yamamura and K. Yomogita, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol.47, no.7, pp.1115-1120, July 2000.
- [6] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of systems of nonlinear equations using the dual simplex method," *BIT Numerical Mathematics*, vol.42, no.1, pp.214-230, March 2002.
- [7] K. Yamamura and T. Fujioka, "Finding all solutions of non-linear equations using the dual simplex method," *J. Computational and Applied Mathematics*, vol.152, issue 1-2, pp.587-595, March 2003.
- [8] 山村清隆, 田中克昌, "双対単体法を用いた弱非線形方程式の全解探索法," *信学論 (A)*, vol.J88-A, no.7, pp.833-839, July 2005.
- [9] K. Yamamura and K. Suda, "An efficient algorithm for finding all solutions of separable systems of nonlinear equations," *BIT Numerical Mathematics*, vol.47, no.3, pp.681-691, Sept. 2007.
- [10] K. Yamamura, K. Suda, and N. Tamura, "LP narrowing: A new strategy for finding all solutions of nonlinear equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol.215, issue 1, pp.405-413, Sept. 2009.

研 究 業 績

- [1] 石黒俊, 高宮将弘, 山村清隆, "平行四辺形 LP テストを用いた非線形回路の全解探索法," 第 28 回 回路とシステムワークショップ論文集, pp.172-177, Aug. 2015.