

**確率過程論に基づく不確実性を有する物理システムの予測に関する研究**  
**—降雨流出過程への応用—**  
**A STUDY ON THE PREDICTION METHOD FOR PHYSICAL SYSTEMS WITH**  
**UNCERTAINTY BASED ON STOCHASTIC THEORY**  
**-AN APPLICATION TO RUNOFF PROCESS-**

都市環境学専攻 成岱蔚


Daiwei CHENG

## 1. 研究背景と目的

台風、洪水、地震などの自然災害の強さは、人間が制御できる範囲を超える時がある。そこで、安全性の水準を定めて、その水準までは防災工事などのハード対策で対応し、水準を超えた外力については、避難などのソフト対策で対応する。ハード対策のみでの絶対安全な防災設計は不可能である。設計基準を超えた災害が発生した時の対応はリスクマネジメントの重要な課題である。リスクの概念を簡単に言えば、災害が発生する確率と災害が発生した時の被害の積である。つまりリスクを把握するには、災害が発生する確率を知ることが非常に重要である。しかし、防災設計において、物理システムのスケールは非常に大きく、複雑な非線形システムである。つまり、設計基準と同程度の外力が発生しても、必ずしも同じ規模の災害が起きるとは限らない。その要因として、以下の3つが考えられる。1、実現象をモデル化することによって、物理真実を表現できるか。2、観測、および人間ができる認識の限界があるため、システムの未来を予測するための全ての情報を手に入れることが可能か。3、カオス現象のあるシステムの未来を決定論的に予測することが可能か。この3つの要因は本研究で議論する物理システムの不確実性である。以上の議論によって、災害のリスクを把握するには、不確実性を有する物理システムの予測方法が非常に重要であることが分かった。本研究の着目点はここにある。

しかし、不確実性を有する物理システムを解析することは容易ではない。初めて、不確実性や確率論の概念を物理システムの解析に導入したのはBoltzmannである。決定論的な気体分子運動論は熱力学第二法則、すなわちエントロピー増加の法則を説明するのが困難であった。熱力学の第二法則によって、熱現象は常にエントロピーの増大する方向にのみ起こり、その逆を示さない点で不可逆的現象である。Boltzmannは、偶然性の介入によってこの問題を解決した。物理システムの予測は熱力学の第二法則と似ている性質がある。2時間先の未来の予測は1時間先の未来を予測するよりも困難である。しかし、決定論的な物理モデルはその性質を反映することができない。本研究は、確率過程論を降雨流出と河道計算に導入し、不確実性の評価する。

## 2. 研究手法と結果

本論文では、不確実性を考慮した降雨流出過程と一次元不定流を対象とした。降雨流出過程の基本式は山田らによって提案された、単一斜面における降雨流出の理論式を用いた。この方程式は常微分方程式であり、降雨の時系列と初期条件を代入すると、流出高の時系列が得られる。しかし、流出解析で用いる降雨データは多種多様であり、観測手法の違いや観測場所等によって、降雨データの時間分解能、空間分布は異なるため不確実性を含むデータである。この降雨の不確実性を考慮することで、支配方程式は確率微分方程式となる。確率微分方程式とFokker-Planck方程式の対応関係を用いて流出高の確率密度関数の時間発展を求めることができる。それを降雨流出予測に応用すると、-2に示すように、赤点は観測値であり、青色の区間は68%の信頼性を持つ予測区間である。また、予測区間の中心の青実線は決定論的な予測、あるいは予測分布の平均値でもある。流出過程すべての観測値がある時間を開始時刻として設定し、本研究が提案した降雨流出過程のFokker-Planck方程式を解けば、イベント全体の予測区

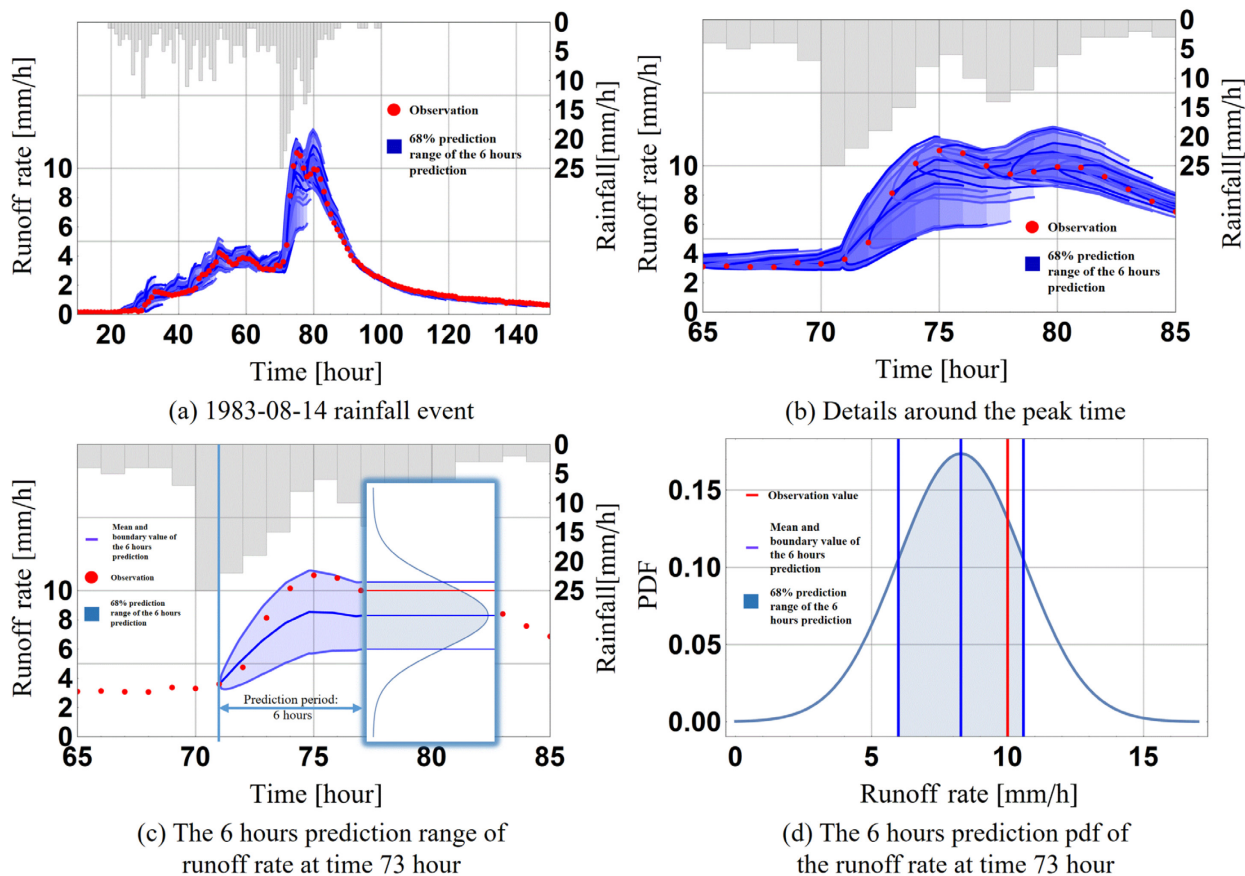


図-1 降雨強度の不確実性を考慮した流出予測. 草木ダム流域 (254km<sup>2</sup>) の降雨イベント. 1983年08月14日0時～. (a)は降雨イベント全体の6時間先予測区間である. (b)は日ピーク付近 (Time=65-85)を拡大したものである. (c)はある時間点 (Time=71時間)からの6時間先予測区間である. (d)は(c)の予測区間における時間が77時間の時の確率密度関数である.

間を計算することができる. ここで, 降雨強度が強いほど, 予測の区間の拡張速度が速く見える. その原因は, 本研究で用いた式が降雨強度の不確実性を考慮しているため, 降雨強度が強いほど拡散係数が大きくなるからである. なお, イベント全体から見れば, 観測値がほとんど予測区間内に入っていることが分かる. 予測時間の長さは6時間先までとした. ここで, 6時間先と設定しているのは, 気象庁が6時間の予測降雨を公表しているからである. これは, 本研究で提案した手法を現実のリアルタイムの洪水予測に用いる時にその予測降雨を使うことを想定しているからである. しかし, 現段階で考慮している不確実性は実測降雨が捉えない時間の中のふらつきである. もし, 気象庁の予測降雨を使うならば, 予測降雨の不確実性を考慮しなければならない. 本研究では単純化のため, 過去の降雨イベントの実測降雨データを使った.

モデルの予測精度を評価する際に, よく計算値と観測値の差を用いられる. その差は一般に“誤差”と呼ばれるが, 本研究では“誤差”は物理システムの不確実性によって生じるものと解釈する. 決定論的な予測では, 1時間先の予測誤差と2時間先の予測誤差が同様に扱うしなければならないが, 本研究が提案した手法を用いれば, 予測“誤差”, あるいは予測目標とした物理量の不確実性の時間発展が分かる. この点は今までの決定論的な予測手法と根本的な違いである. よって, 設計基準を超えるような災害が発生する確率を計算することが可能になり, リスク管理において非常に有効である.

以上に降雨の不確実性を考慮した流出予測の結果を示した. 用いた式はFokker-Planck方程式である. しかし, この手法を複雑なモデルあるいは偏微分方程式に拡張する場合は困難な点がある. Fokker-Planck方程式の次元は空間の次元ではなく, それと対応する決定論の式の解の位相空間の次元である. つまり,

複雑な降雨流出モデルは通常状態変数は5~10個があり、それと対応するFokker-Planck方程式は5-10次元の式になり、直接に解くことが不可能である。それに対して、本研究は上述の理論に基いて不確実性を有する物理量の分布モーメントの時間発展を支配する方程式を提案した。しかし、直接Fokker-Planck方程式からモーメント方程式を導くと、物理システムが非線形である場合はモーメントの完結問題が発生し、モーメント方程式を導出することができない。それに対して、本研究では不確実性成分を摂動成分とし、確率微分方程式に対して摂動解析を行うことで、非線形の方程式は線形で近似することができることを示した。以上をまとめると、摂動解析とモーメント方程式を併用することで、本研究で提案した手法は複雑なモデルあるいは偏微分方程式に拡張することができることが分かった。

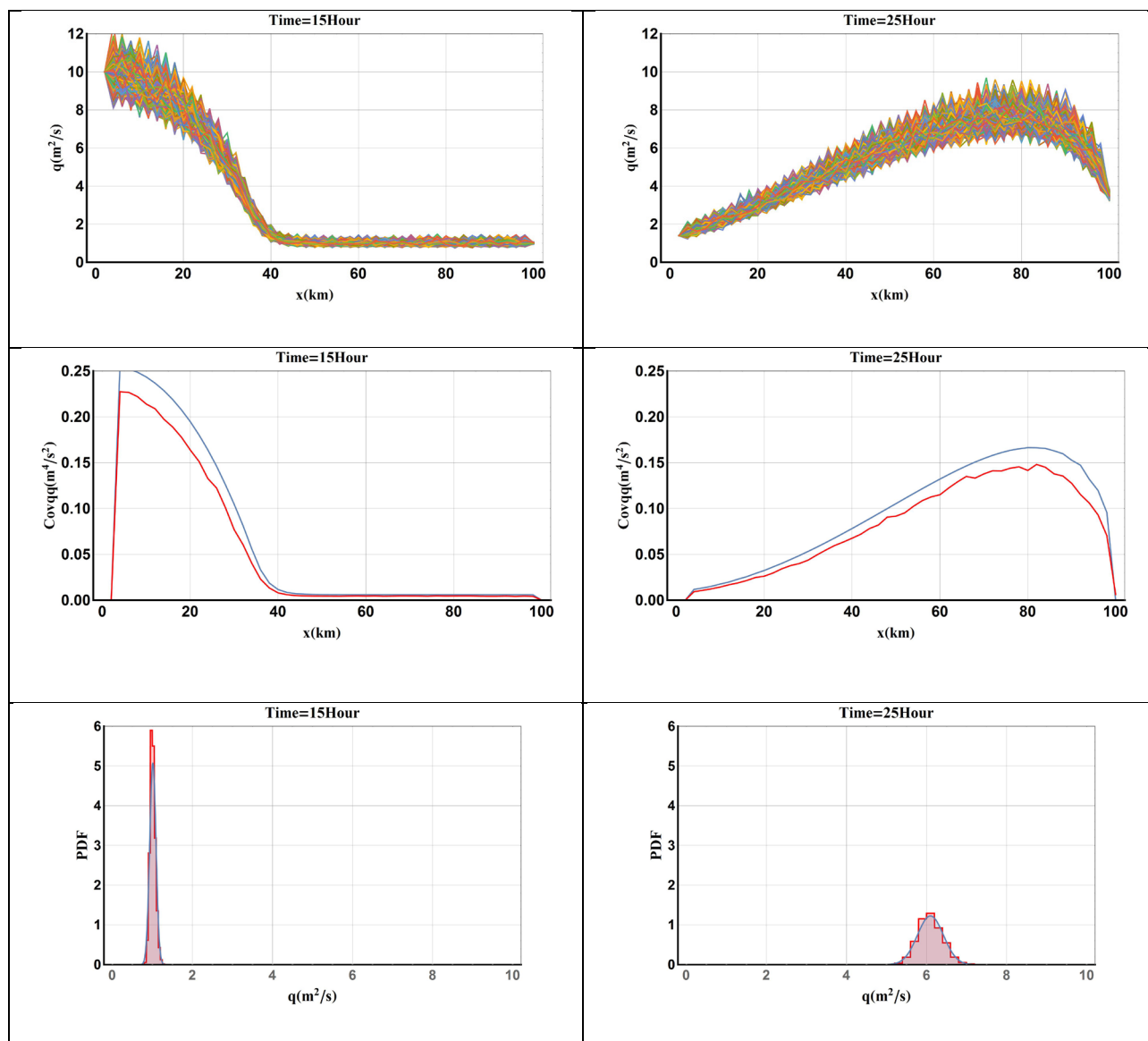
一次元の開水路不定流の支配する方程式は連続式と運動方程式である。変数は水位 $h(x, t)$ と単位幅流量 $q(x, t)$ である。支配方程式である運動方程式の中に底面せん断力応力の項がある。底面せん断力応力は河床からの抵抗が生じる乱流の効果をモデルして評価したものである。ある瞬間でみると、底面せん断力応力は平均の周りにふらつくことが分かっている。本研究では、このような底面せん断力応力の不確実性を考慮した一次元開水路の不定流における不確実性を検討した。

図-3に計算結果を示している。計算区間の上流端にディリクレ型境界条件、下流端にノイマン型の境界条件を与えているため、境界において不確実性はない(図-3の第2行示すように、上、下流端の分散は0)。この結果は、情報のある地点から離れるほど不確実性が大きくなる事実を反映している。つまり、物理システムの不確実性を考慮した予測は情報源から時間、空間の距離が増加することにつれて、予測の精度が落ちることを本研究が提案した手法で表現できた。その上で、サンプリング計算の結果とよく一致することを示した。一般にサンプリング手法は、システムの非線形性や、不確実性の要因に関わらず使える手法であるが、その収束性と計算効率が問題である。本研究で提案した手法は、計算効率がサンプリング手法に比べ遥かに優れているため、実際のリアルタイム予測に使用することが期待できる。

### 3. 論文の構成と結論

本研究の構成および結論を以下にまとめる。第1章では研究の背景および問題点について論述した。古典力学系の決定論的な考え方には限界があり、エントロピーとリスクを考慮する時に、物理システムの不確実性を考慮しなければならない。第2章では不確実性を有する物理システムの数学的な扱い方を紹介した。入力と出力の物理量は関数関係がある場合は直接に解析法を使うことができる。物理システムが微分方程式に支配されている場合は、確率過程論を導入する。第3章では流出解析に確率過程論を導入し、入力データの不確実性を評価するために、確率過程論の概要を解説した。具体的には、Brown運動の数理化であるWiener過程の定義と確率過程の意味、それを基礎として展開されるIto calculusを解説した。また、Brown粒子の運動を記述したLangevin方程式とIto calculusによって確率解析学的な微積分の規則が導入された確率微分方程式の概念とそれに対応するFokker-Planck方程式の存在を示した。加えて、Fokker-Planck方程式の導出は、確率微分方程式から行えることを示した。また、最もシンプルな確率過程であるドリフトを持たない(時間的に拡散するのみ) Wiener過程の確率微分方程式とFokker-Planck方程式の解を比較して、両者が同一の確率過程を表現する異なる方程式系であることを示した。第4章では第3章で導いたFokker-Planck方程式が、より複雑な物理システムに応用することが困難であることを指摘した。そして摂動解析を用いて、Fokker-Planck方程式の漸近展開を行い、モーメント方程式を導き、その妥当性を検証した。第5章ではFokker-Planck方程式を拡張カルマンフィルタのステップ1に置き換えることで、新たな非線形フィルタを提案した。提案したフィルタは拡張カルマンフィルタと比較すると、不確実性の拡散効果がより正しく表現できることを示した。さらに、偏微分方程式系にFokker-Planck方程式を適用する手法を提案した。本研究が提案した手法を、実際に草木ダム流域に使い、その

効果について検討した.



## 参考文献

例えば, V. M. Planck: Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 323-341, 1917.

吉見和紘, 山田正, 山田朋人(2015), 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集B1(水工学) Vol. 71, No.4, I\_259-I\_264 (2015).

伊藤清: 確率論【現代数学(14)】, 岩波書店, 1953.

山田正: 山地流出の非線形性に関する研究, 水工学論文集, 第47巻, pp.259-264, 2003.

椎葉充晴, 立川康人, 市川温: 水文学水工計画学, 京都大学学術出版会, 2013