博士論文要旨 (2016年度)

非圧縮性流体解析法の音速法による開発

Development of incompressible flow analysis by using acoustic velosity method

都市環境学専攻　内山　一郎

Ichiro Uchiyama

1.　はじめに

港湾施設や海岸保全施設の耐波設計や耐津波設計では、国土交通が監修している「港湾の施設の技術上の基準・同解説（以降、港湾基準と称す）」や「海岸保全施設の技術上の基準・同解説（以降、海岸基準と称す）」を用いて、実務的な設計を行っている。現行の港湾基準は、平成１９年に改訂されており、性能設計がその基本コンセプトとなっている。例えば重力式防波堤のような標準的な港湾構造物では、現行の港湾基準を参照すれば、所要の耐波性能・耐津波性能・耐震性能を満足する構造物を設計することは可能である。しかし、最近では、耐津波性能や耐震性能の向上等を目的とした構造物の改良を行う場合や、標準的な構造から逸れる構造物の設計を行う場合も増えてきており、現行の港湾基準のみでは適切な設計ができないこともある。このような場合、水理模型実験や高精度の数値シミュレーション技術を駆使して、設計を行うことになる。

水の流体を対象とした数値シミュレーションに関しても、港湾・海岸分野で様々な数値シミュレーションが開発されているため、目的に応じて適切なシミュレーション手法を適用することなる。耐波性能・耐津波性能の検討に際しては、３次元モデルも実務的に使われるようになりつつあり、流体の挙動をかなり高精度にシミュレートすることが可能となってきている。

本研究の動機は、まずは、港湾・海岸分野で様々な形状を有する構造物の耐波設計・耐津波設計にも適用できる流体解析手法を開発することである。

2.　基礎方程式

(1) 基礎方程式

本研究では、従来から、川原ら（1984）が適用してきた音速法を一般化させ、空気および水の両方の流体を対象とし、適用性に優れる計算モデルを開発した。この計算モデルにより、従来の音速法における課題として考えられていた無次元化基準流速の設定や孤立波反射後の減衰等の数値計算上の課題も解決することができた。

基礎方程式は、以下の式(1)と(2)に示すように、密度を考慮した流体の連続式と運動方程式を用いる。

$$\dot{\rho} + v_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}\right) + p_{,i} - \tau_{ji,j} - \rho f_i = 0 \tag{2}$$

今、音速 c は式(3)のように定義されるので、式(1)の連続式は式(4)のように表すことができる。

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{3}$$

$$\dot{p} + v_i p_{,i} + \rho c^2 v_{i,i} = 0 \tag{4}$$

また、定数 ϕ を式(5)のように定義すると、結局、式(1)の連続式は式(6)のように表すことができる。また、運動方程式は、式(7)の通りである。これらの式が、一般化された音速法の基礎方程式である。連続式を式(6)のように変形するとにより、SUPG法を本来の形で包括的に組込むことができる。また、Navier-Stokes方程式を解く際には、例えばポアソン方程式を解くプロセスが必要となる。しかし、本手法では流速・圧力が直接法で同時に求まり、計算アルゴリズムも比較的簡単である。

$$\phi = {}^{1}\!/_{\rho c^2} \tag{5}$$

$$\mathrm{A} = \phi(\dot{p} + v_i p_{,i}) + v_{i,i} = 0 \tag{6}$$

$$B_i = \rho\left(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}\right) + p_{,i} - \tau_{ji,j} - \rho f_i = 0 \tag{7}$$

(2) 有限要素方程式

式(6)と式(7)の基礎方程式に対して、有限要素方程式を導出する。SUPG法を考慮した式(8)の重み関数を用いると式(9)の有限要素方程式を満たす必要がある。

$$\begin{aligned}(\widetilde{p^*}\ \widetilde{v^*}_i) &= (p^*\ v_i^*)\\ &+\tau_M (p^*\ v_i^*)_{,k} \begin{pmatrix}\phi v_k & \delta_{ik}\\ \delta_{jk} & \rho v_k \delta_{ij}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\rho\|v\|^2 & \\ & {}^{1}\!/_{\rho}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\int_v (\widetilde{p^*} A + \widetilde{v^*}_i B_i) = 0 \tag{9}$$

式(9)に、式(6)と(7)を代入すると、以下の式(10)と式(11)ような有限要素方程式を導き出すことができる。

$$\begin{aligned}\phi \int_v (p^* \dot{p}) dv + \phi \int_v (p^* v_i p_{,i}) dv + \int_v (p^* v_{i,i}) dv\\ + \nu_A \phi^2 \int_v (p_{,i}^* v_i \dot{p}) dv\\ + \nu_A \phi^2 \int_v (p_{,i}^* v_i v_j p_{,j}) dv\\ + \nu_A \phi \int_v (p_{,i}^* v_i v_{j,j}) dv\\ + \tau_p \rho \int_v (p_{,i}^* \dot{v}_i) dv\\ + \tau_p \rho \int_v (p_{,i}^* v_i v_{i,j}) dv\\ + \tau_p \int_v (p_{,i}^* p_{,i}) dv = 0\end{aligned}$$

(10)

$$\rho\int_v (v_i^*\dot{v}_i)dv + \rho\int_v (v_i^* v_j v_{i,j})dv - \int_v (v_{i,i}^* p)dv$$
$$+\int_v (v_{i,j}^*\,\tau_{ij})dv + \nu_C\phi\int_v (v_{i,i}^*\dot{p})dv$$
$$+\nu_C\phi\int_v (v_{i,i}^*\,v_j p_{,j})dv$$
$$+\nu_C\phi\int_v (v_{i,i}^*\,v_{i,j})dv$$
$$+\tau_M\rho\int_v (v_{i,j}^*\,v_j\dot{v}_i)dv$$
$$+\tau_M\rho\int_v (v_{i,j}^*\,v_j v_k v_{i,k})dv$$
$$+\tau_M\int_v (v_{i,j}^*\,v_j p_{,j})dv$$
$$=\int_s (v_i^*\,t_i)ds + \rho\int_v (v_i^*\,f_i)ds$$

(11)

ここに， ν_A， ν_C， τ_pは以下の通りである．

$$\nu_A = \rho\|v\|^2\tau_M \tag{12}$$
$$\nu_C = \rho\|v\|^2\tau_M \tag{13}$$
$$\tau_p = \frac{1}{\rho}\tau_M \tag{14}$$

すなわち、式（8）のように重み関数を現すことで、SUPG・PSPG・LSIC等の安定化項を本来の形で包括的に組み込むことができる。この手法を一般化された音速法と呼ぶことにする。

3.　２次元Cavityの計算

最初に、モデルの妥当性を確認するため、Cavity内の強制滞留問題に対する検討を行った。

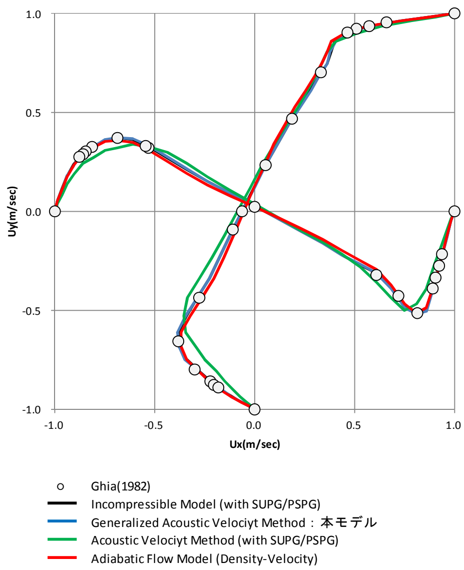

図-1　各計算モデルのGhia（1982）との比較

Cavityの計算結果に関して、Ghiaとの比較を行った結果を図-1に示す。本研究で開発した一般化された音速法モデルの結果は、非圧縮モデルの結果とほぼ一致している。このことから、連続式における圧力の時間項・移流項は微小な値であることがわかる。また、従来の音速法モデルと一般化された音速法モデルでは、計算結果に差異が見られる。これは、変数の無次元化処理の有無、安定化項の数値粘性の効果が影響しているものと考えられる。なお、安定化項を考慮することで、計算の時間刻みdtは10^{-6}secから10^{-3}secのオーダーまで大きくとることが可能となり、計算効率が大幅に改善された。

4.　２次元孤立波の計算

次に、自由表面の取り扱いが必要となる孤立波の事例で、側方境界と下方境界は、slip条件とした。孤立波の初期水位・流速は、Laitone式を用いて設定した。なお、孤立波が砕波しないように、波高水深比 (ζ/h) は0.1とした。

また、本計算では、計算中のメッシュの破綻を回避するためにALE法を用いた。自由水面は、Lagrange的にノード点を移動させた。また、流体内部ではALE法を用い、ノード点のx座標が自由水面のノード点のx座標と常に一致するようにした。

孤立波の計算結果として、いくつかのタイムステップのスナップショットを図-3に示す。カラーの凡例は圧力分布を示している、図-3の結果から、孤立波の形状が保持され安定的に伝搬している状況、孤立波が形状を保持したまま壁から反射している状況がわかる。

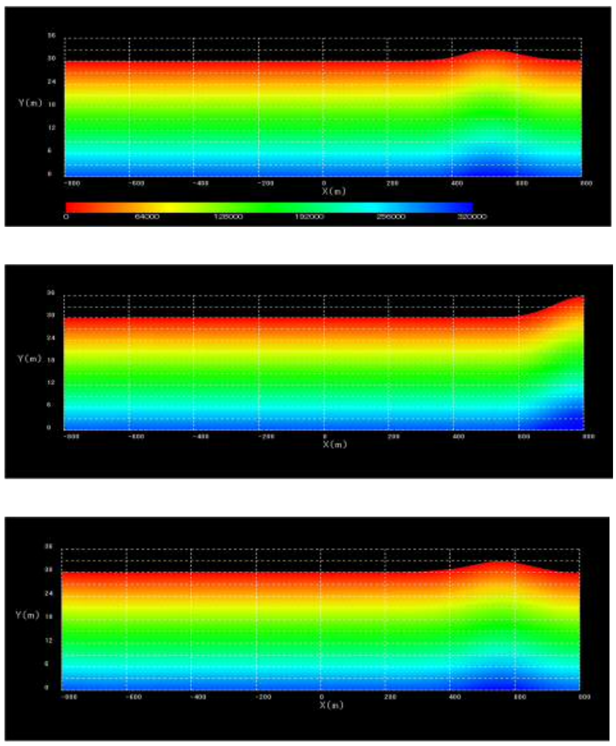

図-3　孤立波の伝搬状況
（上段；T=30sec，中段；T=45sec，下段；T=60sec）

5.　リーフ地形上の孤立波の計算

次に、3次元モデルを用いた孤立波の計算の計算条件を図-4に示す．水路の途中に1/20の勾配を設け，下流側に水深を半分とした0.5mのリーフ地形を設けた．

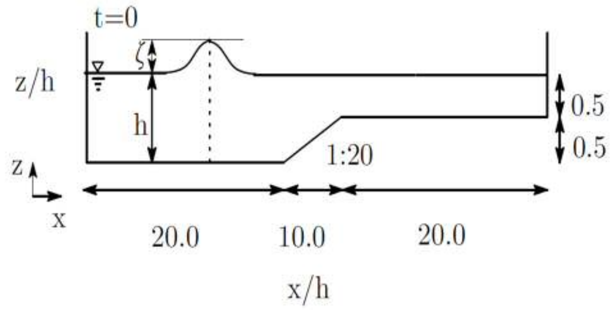

図-4　リーフ地形上の孤立波の計算条件

計算結果として，Streetら（1968）の実験結果との比較を図-4に示す。図-5は、リーフ地形上のx/h＝41.6における水位時刻歴の比較であるが、計算結果はStreetらの実験結果と非常によく一致している。この計算結果より，3次元孤立波の計算でも、安定的かつ正確な計算結果が得られていることがわかる。

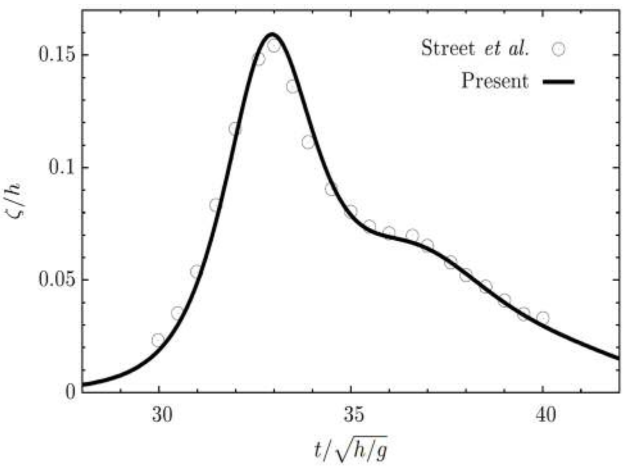

図-5　水位時刻歴の計算値と実測値の比較

本研究で示した計算結果により、一般化した音速法により、空気・水いずれの流体においても、安定的かつ正確に計算できることが明らかとなった。また、従来の音速法の課題として、無次元化の基準流速を正確に設定する必要があった点、孤立波が反射後に減衰する点が、改善された。

6.　一般化された音速法の応用例

本研究で開発した一般化された音速法を用いて、海岸護岸の最適断面の推定問題に応用した。海岸護岸を例にあげると、断面の最適化の観点では、構造物に作用する水平力（ΣFx）と鉛直力（ΣFy）の和を時間方向にも積分し、最小化する方法が考えられる。評価関数は、以下のように表すことができる。

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(F_i Q_{ij} F_j)dt \rightarrow \text{最小化}$$

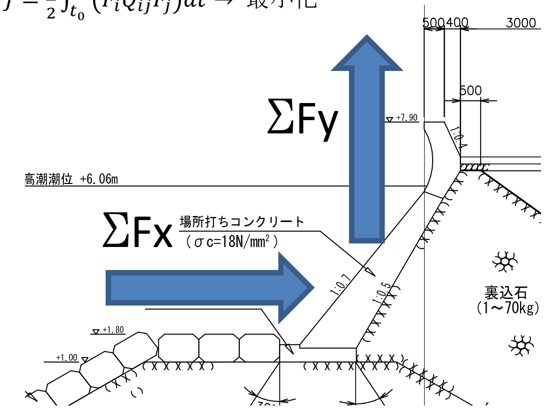

図-5　海岸護岸に作用する水平力・鉛直力

流体の中では、前章で記述した流体の連続式と運動方程式も満たすため、前述の評価関数に流体の連続式・運動法手式を加味すれば、以下のような拡張評価関数が得られる。

$$J^* = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(F_i Q_{ij} F_j)\,dt + \int_{t_0}^{t_f} p_\alpha^*(\phi_0 M_{\alpha\beta}\dot{p_\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}p_\gamma + H_{\alpha\beta i}u_{\beta i})dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^*(\rho_0 M_{\alpha\beta}\dot{u_{\beta i}} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\gamma i} - H_{\beta i\alpha}p_\beta - S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j} - T_{\alpha i})dt$$

この拡張評価関数を最小化できる海岸護岸の断面形状を求めることになるが、最小点では、各変数で微分した値がゼロになる条件を探していけばよい。そこで、拡張評価関数を各変数で微分すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\delta J^* = &\int_{t_0}^{t_f} \delta p_\alpha^*(\phi_0 M_{\alpha\beta}\dot{p_\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}p_\gamma + H_{\alpha\beta i}u_{\beta i})dt\\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \delta u_{\alpha i}^*(\rho_0 M_{\alpha\beta}\dot{u_{\beta i}} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\gamma i} - H_{\beta i\alpha}p_\beta - S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j} - T_{\alpha i})dt\\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \delta p_\beta(-\phi_0 M_{\alpha\beta}\dot{p}_\alpha^* + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}p_\alpha^* - H_{\beta i\alpha}u_{\alpha i}^*)d\\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \delta u_{\beta i}(-\rho_0 M_{\alpha\beta}\dot{u}_{\beta i}^* + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma i}p_\beta p_\alpha^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\alpha j}^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\alpha i}^* - S_{\alpha i\beta j}u_{\alpha j}^*)dt\\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \delta T_{\alpha i}(-u_{\alpha i}^* - Q_{ij}F_j)dt\\ &+ M_{\alpha\beta}p_\alpha^*(t_f)\delta p_\beta(t_f) - M_{\alpha\beta}p_\alpha^*(t_0)\delta p_\beta(t_0)\\ &+ M_{\alpha\beta}u_{\alpha i}^*(t_f)\delta u_{\beta i}(t_f) - M_{\alpha\beta}u_{\alpha i}^*(t_0)\delta u_{\beta i}(t_0) + G_{\delta k}X_{\delta k} = 0\end{aligned}$$

$\delta J^* = 0$となるためには、上の式の各項がそれぞれゼロにならなければならない。結局、$\delta J^* = 0$となるためには、下の式に基づきメッシュを移動させながら、評価関数を最小化できる条件を繰り返し計算により求めていくことになる。

$$\delta J^* = G_{\delta k} X_{\delta k}=0$$

$$G_{\delta k} = \int_{t_0}^{t_f} p_\alpha^* \left(\phi_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{p_\beta} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} p_\gamma + \frac{\partial H_{\alpha\beta i}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta i} \right) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* \left(\rho_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{u_{\beta i}} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \frac{\partial H_{\beta i\alpha}}{\partial X_{\delta k}} p_\beta - \frac{\partial S_{\alpha i\beta j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} \right) dt$$

計算結果として、孤立波の計算メッシュ中に、図-5のもたれ式護岸を模した高さ2.5mの円弧上の壁を初期条件として設置した計算事例を示す。なお、この計算では長さ一定の制約条件の他、壁の下端は固定条件とした。

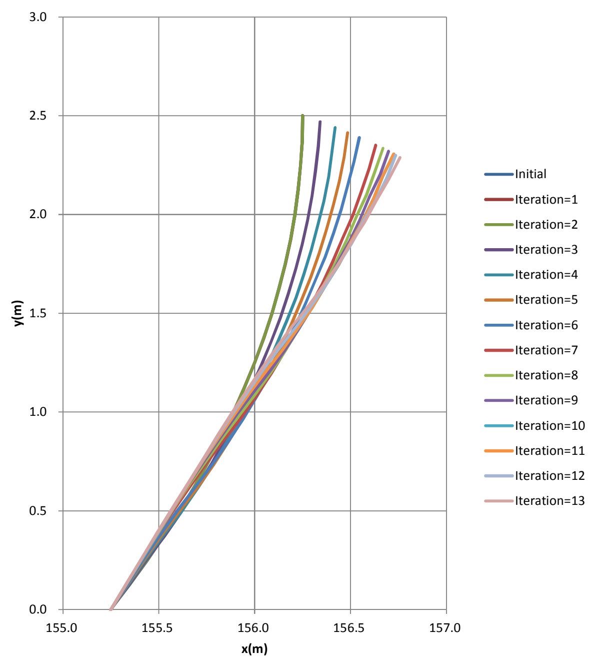

図-6　最適断面の計算結果

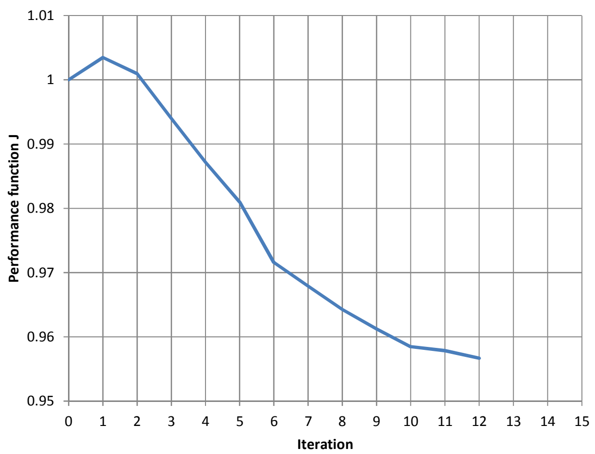

図-7　評価関数 J の推移

計算結果より、評価関数 J がほぼ一定となっており、最適形状が得られていると判断できる。この事例計算では、最適形状がほぼ直線状になっている。海岸護岸等で最適断面の推定を行った事例はほとんどなく、本研究により一つの設計アプローチを提起することができた。また、将来的には、以下のような港湾・海岸分野での応用が考えられる。ただし、実務に応用するためには、越波や砕波現象も考慮できるよう、別のアルゴリズムを流体解析モデルに追加する必要がある。

参考文献

[1] U.Ghia, KN.Ghia, ST.Chan:High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, Journal of Computational Physics , 48(1), 1982, 387-411.

[2] M. Kawahara: Finite element method of incompressible, adiabatic, and compressible flows: From Fundamental Concepts to Applications (Mathematics for Industry), *Springer*, 2016.6.

[3] A. Maruoka, I. Uchiyama, M. Kawahara: Finite element analysis of solitary wave propagation by acoustic velocity method, 2016.10, Journal of Computational Mechanics.

[4] H. Okumura, Y. Hikino and M. Kawahara: A shape optimization method of a body located in adiabatic flows, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.27 (2013), 297-306.

[5] R.L. Street, S.L. Burges, P.W. Whitford: Dept. of Civil Engng.,　*Stanford Univ. Tech. Rept*. No.93, 1968.