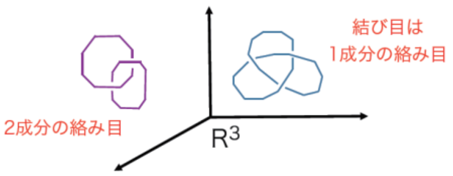
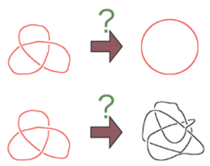
# 位相不変量の計算理論

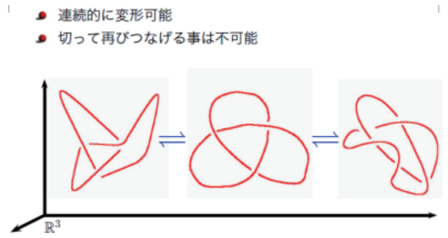
研究代表者　山本 慎　研究員




結び目 (knot) とは3次元ユークリッド空間に埋め込まれた1つの単純閉曲線のこと.
絡み目 (link) とは3次元ユークリッド空間に互いに素に埋め込まれた有限個の単純閉曲線のこと. それぞれの単純閉曲線を成分という.

結び目・絡み目理論の基本的な問題
　結び目・絡み目の自明性判定問題
　　結び目・絡み目を切らずにほどくことができるか?
　結び目・絡み目の同値性判定問題
　　2つの結び目・絡み目が "同じ" ものか?
　　(一方を, 切らずに, もう一方に変形できるか?)



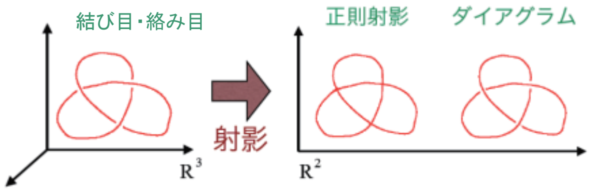




結び目・絡み目の位相不変量
　結び目・絡み目ごとに1つの "量" が計算でき, 同値なものはその量が同じになる.
　その量を位相不変量, 簡単に不変量という.

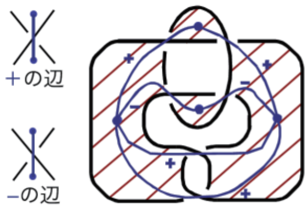
同値性を判定する能力に優れている位相不変量は計算するのが難しい.
Jones polynomial は判定能力が優れていると思われるが 計算するのが難しい. Jones polynomial の計算は "#P困難" であることが証明されている (Welsh 1993). このことから, 任意の結び目・絡み目を多項式時間で計算するアルゴリズムは存在しないだろうと思われる.

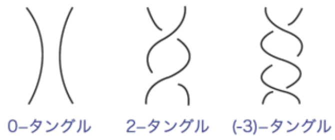
結び目・絡み目に条件を付けてJones polynomial を現実的な時間で計算できるアルゴリズムを提案したい.

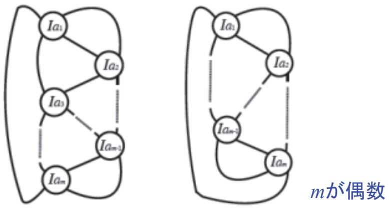
そのための条件を結び目・絡み目の "ダイアグラム" に与えることを試みる.

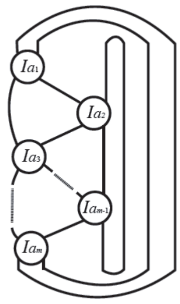



結び目・絡み目を平面に, 交わる部分は横断的に交わっている2重点のみからなるように射影したものを結び目・絡み目の正則射影という.
正則射影の各2重点に交差の上下の情報を加えたものを結び目・絡み目のダイアグラムという.
結び目・絡み目のダイアグラムから Tait グラフという平面グラフを構成できる. たとえば, 下の左から2つ目の図の黒い線が表すダイアグラム から構成される Tait グラフは同じ図の中の青い部分が表すグラフである.
下の左側から3つ目, 4つ目, 5つ目のような図形をタングルという. $k$ 回捻じったものを$k$-タングルという.



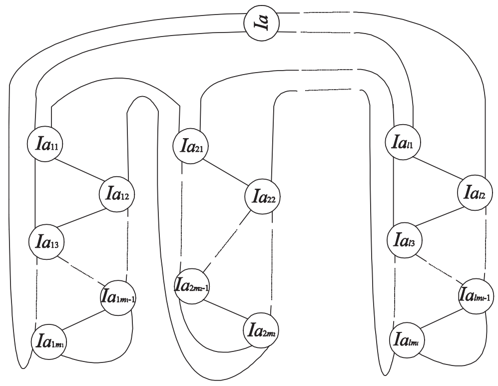



定理 (Hara-Murakami-Tani-Yamamoto)
　2橋絡み目の標準的なダイアグラム (上の図の右から2つ目と3つ目の絡み目) の Tait グラフから Jones polynomial は $O(n)$ 回の多項式演算で計算可能である. すなわち, $O(n^2 \log n)$ 時間で計算可能である. ここで, $n$ はダイアグラムの交点数である.

定理 (Hara-Murakami-Tani-Yamamoto)
　閉3組み紐絡み目の標準的なダイアグラム (上の図の最も右側の絡み目) の Tait グラフから Jones polynomial は $O(n)$ 回の多項式演算で計算可能である. すなわち, $O(n^2 \log n)$ 時間で計算可能である. ここで, $n$ はダイアグラムの交点数である.

定理 (Hara-Murakami-Tani-Yamamoto)
　Montesinos絡み目の標準的なダイアグラム (右の図の絡み目) の Tait グラフから Jones polynomial は $O(n)$ 回の多項式演算で計算可能である. すなわち, $O(n^2 \log n)$ 時間で計算可能である. ここで, $n$ はダイアグラムの交点数である.



(各図の $I_{a_1}, \ldots$ はタングルを表し, 添え字は捻じりの回数を表す.)

CHUO UNIVERSITY