非線形システムの数値解析法の開発とLSI設計への応用に関する研究

研究代表者　研　究　員　**山村　清隆**（中央大学理工学部）
共同研究者　研　究　員　**榎本　忠儀**（中央大学理工学部）

1　本研究の総括

本研究では，大規模集積回路（LSI）をはじめとする非線形システムの新しい数値解析法の開発とその応用・実用化に関する研究を行った．特に，これまで解決不可能と見なされてきたこの分野の未解決問題や，理論と実用を連続的につなぐ研究に焦点を当てて研究を行った．

この数年間に行った研究は以下の三つに大別される．

1. 大規模集積回路の大域的求解法の開発とその実用化に関する研究
2. 「式を回路で記述する」という逆転的発想に基づく新しい数値解析法の開発に関する研究
3. 非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究

1. については，LSI 設計における大きなボトルネックとして世界中の設計者を悩ませていた「非収束問題」に対し，ホモトピー法を用いた収束性の高いアルゴリズムを開発し，その大域的収束性を証明した．さらに企業との共同研究により，最も解析が困難とされるバイポーラアナログ回路に対して，その最大級である二万素子クラスのアナログ LSI を世界で初めて収束の保証付きで解くことに成功した．それにより LSI 設計期間の短縮や，このクラスの LSI の業界に先駆けた製品化，更には民生機器の高度化・低価格化に貢献した．**本技術を適用して設計・開発・製造されたバイポーラアナログ LSI の生産金額は年間約 800 億円，生産数量は年間 10 億個以上に達し，家庭用電気製品，マルチメディア製品，パソコン，携帯電話等に広く使用されている．**

なお本研究で開発したアルゴリズムは，その後 IEEE（国際電気電子学会）の次世代 SPICE プロジェクトでも採用され，全世界に公開されている[1]．

2. については，「式を回路で記述する」という逆転的発想に基づく新しい数値解析法を考案し，いくつかの学会で招待講演を行った．一般に非線形システムの数値解析ではシステム（例えば回路）を方程式で記述し，それに数値解法を適用するが，この方法では数値解法の式を回路で記述し，それに回路シミュレータ SPICE を適用する．それにより手軽でプログラミングのいらない数値解析を実現することができる．また，SPICE に搭載された様々な手法が数値解析の効率を大幅に向上させることが期待される．特に SPICE ユーザーにとっては使い慣れた SPICE を用いて手軽に利用できる極めて実現容易な方法となる．

3. については，LSI 設計における重要な未解決問題として知られている「非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムの開発」に対し，線形領域数 10000^{4000} の超大規模問題の全解探索を実用時間内で行うことのできる非常に効率のよいアルゴリズムを提案した．

本稿では，3. で開発した全解探索法について報告する．

2　問題の背景と本研究の内容

非線形回路，あるいはそれを区分的線形近似することにより得られる区分的線形回路のすべての解（直流動作点，特性曲線など）を求める効率的なアルゴリズムを確立することは，信頼性の高い回路設計を行う上で重要な課題となる [1] ～ [15]．この問題は回路に含まれる区分的線形素子の数 n の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する，非常に難しい問題として知られている．いわゆる NP 完全問題，あるいは計算量爆発問題と呼ばれる類の問題である．このテーマに関しては 70 年代から 90 年代前半にかけて非常に多くの論文が発表されたが，どちらかというと学問的興味の観点から進められ，実用化はとても不可能というのが共通の認識であったように思われる．

この分野の近年の発展状況は次の通りである．1996 年にはまだ 10 変数程度の小規模問題しか解くことができなかったが [8]，1998 年にこの問題に線形計画法を導入することにより，$n = 100$, 線形領域数 $L = 10^{100}$ の回路のすべての解を求めることに初めて成功した [10]．そして 2000 年には $n = 200$, $L = 10^{200}$ の問題が [12]，2002 年には $n = 300$, $L = 10^{300}$ の問題が解かれた [14]．最近では，$n = 500$, $L = 10^{500}$ の問題の全解探索に成功している [15]．

ところでこれまでの研究では，慣例的に（というか，問題の本質的な難しさゆえに）非線形関数を 10 本程度の線分からなる区分的線形関数で近似することが多かった．この場合，線形領域の数は 10^n となる．ところがこの程度の線分数だと，区分的線形近似の精度が悪くなり，もとの

[1] http://ngspice.sourceforge.net/devdoc.html

表 1　文献 [15] の計算結果

n	L	S	T (秒)
50	10^{50}	9	18
100	10^{100}	9	319
150	10^{150}	11	1 170
200	10^{200}	9	2 620
250	10^{250}	9	1 647
300	10^{300}	11	2 758
350	10^{350}	9	4 848
400	10^{400}	3	8 305
450	10^{450}	3	16 396
500	10^{500}	3	21 364

表 2　文献 [16] の計算結果

n	S	T (秒)
50	11	1
100	9	12
150	13	62
200	13	202
250	17	556
300	11	1 323
350	13	3 308
400	9	7 187
450	11	15 152
500	13	29 971

非線形回路のすべての解（近似解）を求めることができないという問題が生じてくる．例えば表 1 は，n 個のエサキダイオードを含む非線形回路を線分数 10 で近似した区分的線形回路に，文献 [15] のアルゴリズムを適用したときの計算結果である．ただし，L は線形領域数，S は得られた解の個数，T は計算時間（秒）を表す．また表 2 は，文献 [16] で提案された区間解析アルゴリズム（非線形方程式のすべての解を数学的保証付きで求めることができる）をもとの非線形方程式に適用したときの計算結果である．これらの表から，得られた解の数がかなり違っていることがわかる．すなわち非線形関数を近似する区分的線形関数の線分数が 10 本程度では，信頼性の高い全解探索は（n が大きくなるほど）困難であることがわかる．

このような問題を解決するためには，文献 [16] のように区間解析の手法を用いるか，非線形関数を非常に多くの線分からなる区分的線形関数で近似する必要がある．本稿では後者の方法を考え，近似精度の高い区分的線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムを提案する．

3　提案手法と数値例

n 個の区分的線形抵抗を含む抵抗回路は，一般に次のような形の区分的線形方程式で記述することができる．

$$f(x) \triangleq Pg(x) + Qx - r = 0 \tag{1}$$

ただし，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ は区分的線形抵抗の枝電圧または枝電流を要素とする n 次元変数ベクトル，$g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \cdots, g_n(x_n)]^T$ はこれらの抵抗の特性を表す R^n から R^n への区分的線形関数（ただし各成分は一変数関数），P, Q は回路の構造によって決まる $n \times n$ 定数行列，r は電源の値によって決まる n 次元定数ベクトルである．また区分的線形関数 $g_i(x_i)$ はすべて K 本の線分からなるものとする．本稿では，K は（例えば 1000 あるいは 10000 位の）大きな数とする．

以下，f が線形となるような領域を線形領域と呼ぶ．f は分離可能であるから，線形領域は n 次元直方体の形状をとり，また線形領域の総数は K^n となる．このような K^n 個の線形領域からなる初期領域 D に存在する式 (1) のすべての解を求める問題を考える．

式 (1) のすべての解を求めるには，すべての線形領域上で対応する線形方程式を解けばよいが，この方法では n の増加とともに計算時間は爆発的に増大する．そのため解の存在しない多数の線形領域を一挙に除去することのできる強力な解の非存在判定テストの開発が重要となる．

そのようなテストとして，LP テストが知られている [10] ～ [15]．LP テストとは与えられた領域（複数の線形領域からなる n 次元直方体領域）の中に方程式の解が存在しないことを線形計画法を用いて確認するもので，具体的には式 (1) を線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：任意の定数} & \\ \text{制約条件：} & \\ \quad Py + Qx - r = 0 & \\ \quad a_i \leq x_i \leq b_i & i = 1, 2, \cdots, n \\ \quad c_i \leq y_i \leq d_i & i = 1, 2, \cdots, n \end{array} \tag{2}$$

に置き換え，これに単体法を適用する．ただし，c_i, d_i はこの領域における関数 $g_i(x_i)$ の最小値と最大値である．もし単体法により式 (2) の実行可能領域（制約条件を満たす x と y ）が存在しないことが確認されれば，この領域に式 (1) の解は存在しないことになる．

このテストを用いて解の存在領域を絞り込んでいくことにより，非常に効率よくすべての解を求めることができる．本稿では，LP テストアルゴリズムの最新版の一つである文献 [14] のアルゴリズムをベースとして採用する．この方法は既に得られている実行可能タブロー（最適タブロー）から次の領域用の双対実行可能タブローを導き，そこから双対単体法をスタートさせるもので，1 領域当りの平均ピボット演算回数が非常に少なくなる（しばしば 1 回以下となる）ため，LP テストが強力であると同時に非常に効率的になるという特徴をもつ．

本稿ではこのアルゴリズムに，文献 [9] の縮小法を導入し，LP テストを適用する領域数の減少を図る．この手法の導入に際してはいくつかの工夫が必要となるが，紙面の都合により詳細については省略する．

本手法は 2 分木構造の分岐限定法となるため，LP テストが強力に働けば，K の大小にあまり依存せずに高速性を発揮することができる．しかしここで新たな問題が生じる．すなわち，双対単体法を用いた LP テストアルゴリズムでは，2 分木の各節点でタブローをコピーし保存しなければならないため，n と K が大きくなると極めて膨大な量のメモリを必要とする．前述の例題回路の場合，1GB RAM の計算機で $K = 10000$ として文献 [14] のアルゴリズムを適用すると，$n \leq 150$ までしか解くことができない．

この問題に対して最近，アルゴリズムに特殊な変数変換の手法を導入することにより，メモリの問題を一挙に解決できることが判明した（詳細については文献 [17] を参照）．この方法により，メモリ 1GB の計算機でも 2000 変数クラスまで解くことが可能となった．

以下数値例を示す．なお使用計算機は Sun Blade 2000 (UltraSPARC-III Cu 1GHz, 8GB RAM)，プログラミング言語は C（倍精度）である．

初期領域を $([-10, 10], \cdots, [-10, 10])^T$ として，表 1，表 2 で扱った非線形回路のエサキダイオードの特性を 10000 本の線分からなる区分的線形関数で近似した区分的線形回路に本手法を適用したときの計算結果を表 3 に示す．なお，S' は文献 [18] で発表した区間解析アルゴリズムにより確認された，もとの非線形回路の解の個数である[2]．K の値が大きいので，もとの非線形回路と同じ数の解が得られていることがわかる．またこれらの解は区間解析で得られた真の解を 10^{-6} 程度のオーダーの誤差で近似していることが確認されている．すなわち，実用上十分な精度の解

[2]区間解析による非線形回路方程式の全解探索法に関する研究も最近飛躍的な発展を遂げ，文献 [18] では 2000 変数方程式の全解探索に成功している．

表 3　本手法の計算結果

n	L	S	S'	T (秒)
100	10000^{100}	9	9	3
200	10000^{200}	13	13	21
300	10000^{300}	11	11	61
400	10000^{400}	9	9	122
500	10000^{500}	13	13	324
600	10000^{600}	11	11	497
700	10000^{700}	9	9	590
800	10000^{800}	11	11	1 224
900	10000^{900}	19	19	2 353
1000	10000^{1000}	17	17	3 835
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1500	10000^{1500}	13	13	18 723
2000	10000^{2000}	9	9	39 300
2500	10000^{2500}	9	–	131 446
3000	10000^{3000}	27	–	410 840
3500	10000^{3500}	15	–	519 670
4000	10000^{4000}	21	–	1 032 295

が得られている．また本手法は計算効率もよく，$n = 2000$, $L = 10000^{2000}$ という大規模問題の全解探索を 10 時間程度で完了し，最終的には $n = 4000$, $L = 10000^{4000}$ の問題を解いている．また $n = 100$, $n = 1000$ 程度の問題ならそれぞれ数秒，1 時間程度ですべての解を求めている．

なお前述のように 1GB RAM の計算機を使用した場合，文献 [14] のアルゴリズムでは $n \leq 150$ までしか解けなかったのに対し，本手法では $n = 2000$ の全解探索に成功している．

4　むすび

「NP 完全問題」「計算量爆発問題」であるため長い間 “実用化は不可能” と考えられていた全解探索問題も，数千変数クラスの問題を解くことのできるレベルにまで発展を遂げた．しかし基礎研究としての発展ばかりが先行しているのが現状であり，実用化に到達するにはまだいくつかのステップを踏む必要がある．また時代の進歩に期待しなければならない部分もある．全解探索はシステムの信頼性を向上させるうえで非常に重要なテーマとなるため，今後実用的な全解探索法が存在することを前提とした「複数解をもつ回路の応用方法に関する研究」が同時進行で進展することを期待したい．

参 考 文 献

[1] L.O. Chua and R.L.P. Ying, "Finding all solutions of piecewise-linear circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.10, no.3, pp.201–229, July 1982.

[2] Q. Huang and R. Liu, "A simple algorithm for finding all solutions of piecewise-linear networks," IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.36, no.4, pp.600–609, April 1989.

[3] T. Nishi, "An efficient method to find all solutions of piecewise-linear resistive circuits," Proc. 1989 Int. Symp. Circuits & Syst., Portland, Oregon, pp.2052–2055, May 1989.

[4] A. Ushida and T. Nakamura, "Interval analysis of nonlinear resistive circuits," Proc. 1989 Joint Tech. Conf. Circuits/Systems, Computers and Communications, Sapporo, pp.499–505, June 1989.

[5] K. Yamamura and M. Ochiai, "An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.39, no.3, pp.213–221, March 1992.

[6] S. Pastore and A. Premoli, "Polyhedral elements: A new algorithm for capturing all the equilibrium points of piecewise-linear circuits," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.40, no.2, pp.124–132, Feb. 1993.

[7] K. Yamamura, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using simple sign tests," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.40, no.8, pp.546–551, Aug. 1993.

[8] K. Yamamura and M. Mishina, "An algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.24, no.2, pp.223–231, March 1996.

[9] L.V. Kolev, "An efficient interval method for global analysis of non-linear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.26, no.1, pp.81–92, Jan. 1998.

[10] K. Yamamura and T. Ohshima, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.45, no.4, pp.434–445, April 1998.

[11] K. Yamamura and K. Yomogita, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.47, no.7, pp.1115–1120, July 2000.

[12] K. Yamamura and S. Tanaka, "Performance evaluation of the LP test algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.28, no.5, pp.501–506, Sept. 2000.

[13] K. Yamamura and S. Tanaka, "Improvement of the contraction-type LP test algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.29, no.4, pp.403–411, July 2001.

[14] K. Yamamura and S. Tanaka, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the dual simplex method," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.30, no.6, pp.567–586, Nov. 2002.

[15] K. Yamamura and R. Kaneko, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the simplex method," IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, vol.50, no.1, pp.160–165, Jan. 2003.

[16] K. Yamamura and N. Igarashi, "An interval algorithm for finding all solutions of nonlinear resistive circuits," Int. J. Circuit Theory & Appl., vol.32, no.1, pp.47–55, Jan. 2004.

[17] K. Yamamura, A. Machida, and T. Kitakawa, "Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits with high approximation accuracy," Proc. IEEE 2004 Int. Midwest Symp. Circuits & Syst. vol.2, pp.617–620, July 2004.

[18] K. Yamamura, A. Machida, and S. Katogi, "An efficient algorithm for finding all solutions of nonlinear resistive circuits," Proc. IEEE Int. Conf. Communications, Circuits & Syst., vol.II, pp.1349–1353, June 2004.